RECHERCHES

SUR LES

FONCTIONS DE BERNOULLI

PAR

NIELS NIELSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturv. og mathematisk Afd. XII. 2

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1914

Introduction.

Il est bien connu que JAQUES BERNOULLI [1]) a indiqué, pour la somme de puissances

(1) $$s_m(p) = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + p^m,$$

où m et p designent des positifs entiers, une expression génerale de la forme

(2) $$s_m(p) = \frac{p^{m+1}}{m+1} + \frac{p^m}{2} + \binom{m}{1}\frac{B_1 p^{m-1}}{2} - \binom{m}{3}\frac{B_2 p^{m-3}}{4} + \dots,$$

où il faut supposer $m \geqq 2$, et où les coefficients

(3) $$B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ \dots.$$

sont des nombres rationnels et positifs qui ne dépendent ni de m ni de p.

BERNOULLI indique aussi une méthode pour la détermination successive des coefficients B_s, savoir en posant, dans (2), $p = 1$, puis introduisant

$$m = 2, 3, 4, 5, \dots.$$

Il saute aux yeux que cette méthode de BERNOULLI nous conduira à la fois aux deux formules récursives générales pour les B_s

(4) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} B_{n-s} = (-1)^n \left(\frac{1}{2} - n\right), \\ &\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+2}{2s+2} B_{n-s} = (-1)^{n-1} n, \end{aligned}\right.$$

obtenues de (2) en y posant $p = 1$ et $m = 2n$, respectivement $m = 2n+1$; c'est-à-dire que ces deux formules récursives, attribuées généralement à MOIVRE [2]), respectivement à JACOBI [3]), doivent être désignées comme les formules récursives de BERNOULLI.

Plus tard EULER [4]) et MACLAURIN [5]), en développant leur formule sommatoire, ont retrouvé les mêmes coefficients B_s. De plus, EULER [6]) a découvert que les mêmes

[1]) Ars conjectandi, p. 95—97; Bâles 1713.

[2]) Miscellanea analytica, complementum, p. 6; Londres 1730.

[3]) Journal de Crelle, t. 12, p. 265; 1834.

[4]) Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 6, p. 68—97; 1738 (1732—33).

[5]) A treatise on fluxions; Édimbourg 1742.

[6]) Institutiones calculi differentialis, p. 539—545; Saint-Pétersbourg 1755.

nombres B_s, qu'il désigne comme les nombres de BERNOULLI, forment la partie essentielle des series de puissances obtenues pour les fonctions trigonométriques méromorphes

(5) $$\operatorname{tg} \pi x, \quad \pi \operatorname{coséc} \pi x, \quad \pi \cot \pi x,$$

tandis que la série de puissances qui représente

(6) $$\operatorname{séc} \pi x$$

conduira à une nouvelle suite de coefficients, savoir les positifs entiers

(7) $$E_1 \; E_2 \; E_3 \; E_4 \; \ldots,$$

désignés généralement comme les nombres d'EULER.

Or, ces belles découvertes d'EULER ont joué un rôle fatal dans la théorie des nombres de BERNOULLI, parce qu'elles introduisent des considérations transcendantes, étrangères à la définition parfaitement élémentaires des nombres B_s, savoir la formule (2) ou, ce qui est la même chose, une quelconque des deux formules récursives (4).

En effet, en s'appuyant sur les propriétés des transcendantes élémentaires (5) et (6), un grand nombre de géomètres ont trouvé, par hasard et sans introduire des points de vue généraux, beaucoup de propriétés des nombres de BERNOULLI, particulièrement un grand nombre de formules récursives, plus ou moins intéressantes, et, en suivant LAPLACE[1]), de nombreuses représentations, dites indépendantes, pour les B_n et les E_n.

Les recherches élémentaires, très belles et très profondes, de KRAMP[2]) et de A. v. ETTINGSHAUSEN[3]) ont été inaperçues jusqu'ici et c'est presque la même chose avec les recherches analogues de PUISEUX[4]) qui retrouvent, sous une autre forme, il est vrai, les résultats de KRAMP.

Or, ces recherches élémentaires ne sont que des phénomènes isolés, évidemment parce que les principes les plus simples du calcul des différences finies sont parfaitement négligés d'un point de vue scientifique, de sorte qu'ils sont occupés principalement par des calculateurs routiniers, ce qui est très regrettable pour l'Analyse.

De plus, la foule des formules récursives et des représentations dites indépendantes que l'on a trouvées pour les B_n et les E_n ne sont jamais étudiées d'un point de vue systématique; on ne semble pas avoir remarqué que ces formules conduiront immédiatement à plusieurs propriétés des nombres en question; propriétés que l'on démontre par d'autres méthodes plus compliquées.

Nous citons par exemple que les formules récursives pour les nombres E_n d'EULER donneront sans peine les deux expressions suivantes

(8) $$E_{2n} = 60 k_n + 5, \quad E_{2n+1} = 60 l_n + 1,$$

où les k_n et les l_n désignent des entiers non négatifs, tandis qu'une formule récursive

---

[1]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour l'Année 1777, p. 109—110, 1780.

[2]) Hindenburg comb. analyt. Abhandlungen, t. II, p. 353—368; Leipsic 1800.

[3]) Vorlesungen über die höhere Mathematik, t. I, p. 284—285; Vienne 1827.

[5]) Journal de Mathématiques, t. 11, p. 477—488; 1846.

pour les B_n donnera immédiatement les resultats obtenus par STERN[1]) suppléés par une démonstration très simple du théorème de v. STAUDT[2]), que STERN a pris pour point de départ.

Une étude plus approfondie de telles formules donnera certainement beaucoup d'autres résultats analogues.

La littérature très étendue sur les nombres de BERNOULLI présente des difficultés considérables à celui qui souhaite de l'étudier profondement, parce quelle est sans système générale, mais liée à des sujets de caractère très différent.

De plus le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* est, pour les nombres de BERNOULLI et d'EULER, de très mauvaise foi, comme le montrent clairement les exemples suivants:

1° Le Journal susdit[3]) ne dit rien sur les résultats nouveaux et très importants contenus dans le grand Mémoire de VAN DEN BERG[4]).

2° Le Journal ne mentionne pas un Mémoire de feu de M. SAALSCHÜTZ, quoique ce Mémoire, publié à Königsberg i. P., contient des résultats nouveaux et remarquables.

3° Il est simplement choquant, ce me semble, que le Journal[5]) en question attribue constamment à M. GLAISHER[6]) le cas le plus spécial de la congruence célèbre de KUMMER[7]).

Remarquons encore que ce dernier article attribue à SYLVESTER[8]) un théorème trouvé par v. STAUDT[9]) déjà!

Dans le Mémoire *Recherches sur les nombres de Bernoulli*[10]), que j'ai eu l'honneur de présenter à notre Académie, il y a deux ans à peu près, j'ai développé les fondements d'une théorie élémentaire et systématique des nombres de BERNOULLI et d'EULER.

Dans ce premier Mémoire je désigne par $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ les fonctions de BERNOULLI respectivement les fonctions d'EULER, tandis que j'applique plus tard, pour les mêmes fonctions, les désignations $B_n(x)$ et $E_n(x)$; c'est-à-dire que nous avons à poser, pour tous les n,

$$\varphi_n(x) = B_n(x), \quad \psi_n(x) = E_n(x).$$

Dans une suite de Mémoires suivants, savoir

Verkürzte Rekursionsformeln für Bernoullische und Eulersche Zahlen[11]),

Recherches sur les suites régulières et les nombres de Bernoulli et d'Euler[12]),

[1]) Journal de Crelle, t. 81, p. 290—294; 1876.

[2]) De numeris Bernoullianis commentatio altera. Erlangue 1845.

[3]) Voir t. 13, 1881, p. 193.

[4]) Verslagen en mededeelingen der koninlijke Akademie Amsterdam (2), t. 16, p. 74—176; 1881.

[5]) Voir t. 30, 1899, p. 180—181; t. 31, 1900, p. 287; t. 42, 1911, p. 208.

[6]) Messenger (2), t. 29, pp. 49—63, 129—142; 1899—1900.

[7]) Journal de Crelle, t. 41, p. 368—372; 1851.

[8]) Philosophical Magazine, février 1861.

[9]) De numeris Bernoullianis commentatio altera; Erlangue 1845.

[10]) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 7me série, Section des Sciences, t. X, p. 283—362; 1913.

[11]) Berichte der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, t. LXV, p. 3—26; 1913.

[12]) Annali di matematica (3), t. 22, p. 71—116; 1913.

Note sur une théorie élémentaire des nombres de Bernoulli et d'Euler [1]),
Ueber die von v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen [2]),
Ueber die Verallgemeinerungen der von A. v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen [3]),
Elementære Beviser for Sætninger af v. Staudt og Stern vedrørende de Bernoulliske Tal [4]).
j'ai donné des applications systématiques de ma théorie élémentaire susdite. De cette manière j'ai développé très simplement les propriétés connues des nombres B_n et E_n, souvent sous forme des généralisations très remarquables, et un nombre d'autres propriétés qui sont nouvelles.

Il est très intéressant, ce me semble, que le point essentiel de mes recherches susdites est formé par l'équation fonctionnelle

$$(-1)^n f_n(-x-1) = f_n(x), \tag{9}$$

où $f_n(x)$ désigne un polynome du n-ième degré par rapport à x, savoir

$$f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \tag{10}$$

Dans le Mémoire *Sur le théorème de v. Staudt et de Th. Clausen relatif aux nombres de Bernoulli* [5]) j'ai donné des généralisations très remarquables des formules particulières indiquées par Hermite [6]) et Stern [7]).

Enfin, dans le Mémoire *Recherches sur les résidus quadratiques et sur les quotients de Fermat* [8]) j'ai trouvé des formules générales, dont les deux cas les plus particuliers sont découverts par Cauchy [9]) et par M. Voronoï [10]).

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui j'ai étudié les représentations dites indépendantes de fonctions de Bernoulli et d'Euler, ce qui donnera des géneralisations remarquables des formules développées par Worpitzky [11]).

Quant au Mémoire de Worpitzky, feu M. Saalschütz [12]) dit à juste titre:

.... In diesem Sinne ist eine Abhandlung des Herrn Worpitzky beachtungswert, in welcher alle Ergebnisse aus dem einen Prinzip der Umformung der Bernoullischen Funktionen hervorgehen. Der materielle Gewinn der Abhandlung ist allerdings nicht in demselben Maasse bedeutsam, denn eine grössere Anzahl von Formeln

---

1) Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik, t. 9, nº 24; 1914.
2) Monatshefte für Mathematik und Physik, t. 25, p. 152—162; 1914.
3) Ibid. t. 25, p. 328—336; 1914.
4) Nyt Tidsskrift for Matematik, t. 25; 1914.
5) Annali di matematica (3), t. 22, p. 249—261; 1914.
6) Journal de Crelle, t. 81, p. 93—95; 1876.
7) Ibid. t. 84, p. 267—269; 1878. Göttinger Abhandlungen, t. 23; 1878.
8) Annales de l'École Normale, (3) t. 31, p. 161—204; 1914.
9) Mémoires de l'Institut, t. 17, pp. 265—266, 442—443; 1840 (1830).
10) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 30, p. 184; 1899.
11) Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232; 1883.
12) Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, p. 91; Berlin 1893.

ist bereits früher auf anderen Wege entwickelt oder gleichsam nur zufällig nicht aufgestellt worden, ...

En effet, la seule application que Worpitzky a donnée des nombreuses formules qu'il a développées, est une démonstration du théorème relatif à la nature des coefficients des tangentes, savoir

$$T_n = 2^{2n-p-2}(2Q+1), \tag{11}$$

pourvu que

$$n = 2^p(2q+1); \tag{12}$$

cependant, ce théorème qui est une conséquence immédiate de deux formules d'Euler[1]) était formulé explicitement déjà par Stern[2]).

Or, les généralisations susdites conduiront à des resultats très importants; nous nous bornerons à citer ici seulement une généralisation très remarquable de la congruence célèbre de Kummer[3]), ce qui donnera une demonstration élémentaire et rigoureuse de cette congruence, revoquée par plusieurs géomètres.

Il est remarquable, ce me semble, qu'il s'agit, dans ma démonstration, de l'expression

$$n!\left(B_{n+1}\left(-\frac{a}{\gamma}\right) - B_{n+1}(0)\right) \tag{13}$$

qui joue un rôle fondamental dans mes recherches sur les résidus quadratiques et qui se présente aussi dans les recherches profondes de Kummer[4]) sur le dernier théorême de Fermat.

---

[1]) Institutiones calculi differentialis p. 495—496; Saint-Pétersbourg 1755. Operscula analytica, t. II, p. 273; Saint-Pétersbourg 1785.

[2]) Journal de Crelle, t. 88, p. 92; 1880.

[3]) Ibid. t. 41, p. 368—372; 1851.

[4]) Ibid. t. 40, p. 121; 1850.

Copenhague, le 16 octobre 1914.

Niels Nielsen.

PREMIÈRE PARTIE.

Formules auxiliaires.

I. Les opérations Δ et δ.

Dans ce qui suit nous avons à étudier une polynome entier quelconque, savoir

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\,; \tag{1}$$

posons pour abréger

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)\,,$$
$$\delta f(x) = f(x) + f(x-1)\,,$$

puis

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x) - \Delta f(x-1)\,,$$
$$\delta^2 f(x) = \delta f(x) + \delta f(x-1)$$

et généralement

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x) - \Delta^{n-1} f(x-1)\,,$$
$$\delta^n f(x) = \delta^{n-1} f(x) + \delta^{n-1} f(x-1)\,,$$

nous aurons immédiatement les expressions générales

$$\Delta^p f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} f(x-s)\,, \tag{2}$$

$$\delta^p f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} f(x-s)\,, \tag{3}$$

ou, ce qui est évidemment la même chose,

$$\Delta^p f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \big(f(x-s) - f(x)\big)\,, \tag{4}$$

$$\delta^p f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} \big(f(x-s) - (-1)^s f(x)\big). \tag{5}$$

Posons ensuite

$$\Delta^0 f(x) = \delta^0 f(x) = f(x)\,,$$

et soit

$$\binom{p}{0} = 0\,,$$

même pour $p = 0$, nous aurons les formules inverses de (2) et (3)

$$(6)\qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} \varDelta^{p-s} f(x-s) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} \varDelta^{s} f(x-p+s),$$

$$(7)\qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \delta^{p-s} f(x-s) = (-1)^p \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \delta^{s} f(x-p+s),$$

valables pour $p \geqq 0$.

Remarquons que $\varDelta f(x)$ est un polynome entier du degré $n-1$ par rapport à x, il est évident que $\varDelta^p f(x)$ est, pour $p < n$, un polynome entier du degré $n-p$ par rapport à x; nous aurons particulièrement

$$(8)\qquad \varDelta^n f(x) = n!\, a_0\,,$$

ce qui donnera par conséquent

$$(9)\qquad \varDelta^p f(x) = 0, \quad p > n.$$

Quant aux expressions $\delta^p f(x)$, elles sont toujours des polynomes entiers du degré n par rapport à x.

Étudions particulièrement la différence

$$(10)\qquad \varDelta^p (x+p)^n = \mathfrak{A}_p^n(x)\,,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (2)

$$(11)\qquad \mathfrak{A}_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} (x+p-s)^n\,,$$

tandis que les formules (8) et (9) donneront

$$(12)\qquad \mathfrak{A}_n^n(x) = n!$$

$$(13)\qquad \mathfrak{A}_p^n(x) = 0\,, \qquad p > n.$$

Soit particulièrement $x = 0$, nous posons pour abréger

$$(14)\qquad \mathfrak{A}_p^n = \mathfrak{A}_p^n(0) = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{p}{s} (p-s)^n,$$

ce qui donnera encore

$$(15)\qquad \mathfrak{A}_p^n(-p) = (-1)^{n+p} \mathfrak{A}_p^n.$$

Il saute aux yeux que l'on puisse donner à $\mathfrak{A}_p^n(x)$ cette autre forme plus générale que (11)

$$(16)\qquad \mathfrak{A}_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=m} (-1)^s \binom{p}{s} (x+p-s)^n, \qquad m \geqq p;$$

car, soit $m > p$, les coefficients binomiaux qui figurent au second membre de (16) s'évanouisent pour $s > p$.

Posons de même

$$(17)\qquad \delta^p (x+p)^n = A_p^n(x)\,,$$

nous aurons, en vertu de (3),

$$A_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (x+p-s)^n \tag{18}$$

ou plus généralement

$$A_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=m} \binom{p}{s} (x+p-s), \qquad m \geqq p; \tag{19}$$

posons particulièrement

$$A_p^n = A_p^n(0) = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s} (p-s)^n, \tag{20}$$

nous aurons de même

$$A_p^n(-p) = (-1)^n A_p^n. \tag{21}$$

L'analogie évidente des deux fonctions $\mathfrak{A}_p^n(x)$ et $A_p^n(x)$ puisse être poussée beaucoup plus loin, comme nous le verrons dans les recherches suivantes.

Revenons maintenant à la formule générale (6), nous aurons en posant $x+p$ à la place de x

$$f(x+p) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} \Delta^s f(x+s), \tag{22}$$

formule qui est équivalente à la suivante

$$f(x+p) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{p}{s} \Delta^s f(x+s). \tag{23}$$

En effet, soit $p=n$, les deux formules (22) et (23) coïncident; soit ensuite $p<n$, les derniers $n-p$ termes qui figurent au second membre de (23) disparaîtront à cause des coefficients binomiaux correspondants. Soit enfin $p>n$, les derniers $p-n$ termes qui figurent au second membre de (22) s'évanouiront à cause des différences $\Delta^s f(x+s)$, savoir pour $s>n$.

Soit maintenant m un positif entier quelconque qui satisfait à la condition $m \geqq n$, la formule (23) peut être donnée sous cette autre forme, plus générale encore,

$$f(x+p) = \sum_{s=0}^{s=m} \binom{p}{s} \Delta^s f(x+s), \qquad m \geqq n. \tag{24}$$

En effet, supposons $m>n$, les derniers $m-n$ termes qui figurent aux second membre de (24) s'évanuiront à cause des différences $\Delta^s f(x+s)$, savoir pour $s>n$.

Il est évident que la formule générale (7) n'est pas susceptible à une généralisation analogue, parce que les expressions $\delta^p f(x)$ sont toujours des polynomes entiers du degré n par rapport à x, quelque soit le nombre p.

II. Sur les coefficients binomiaux.

Il est bien connu que la factorielle du rang n

$$(1)\qquad \omega_n(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1), \quad n \geqq 1,$$

$$(2)\qquad \omega_0(x) = 1$$

joue, pour l'opération $\varDelta$, un rôle analogue à celui de la puissance x^n dans le calcul différentiel, parce que nous aurons

$$(3)\qquad \varDelta\omega_n(x) = n\,\omega_{n-1}(x), \quad n \geqq 1.$$

Dans ce qui suit nous posons comme ordinairement

$$(4)\qquad \omega_n(x) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^p x^{n-p} + \ldots + C_n^{n-1} x,$$

où les positifs entiers C_n^p sont les coefficients de factorielle du rang n, de sorte que nous aurons particulièrement

$$(5)\qquad C_n^0 = 1, \quad C_n^{n-1} = (n-1)!$$

Posons plus généralement

$$(6)\qquad \omega^n(x+a) = \sum_{s=0}^{s=n} C_n^s(a) x^{n-s},$$

nous aurons particulièrement

$$(7)\qquad C_n^0(a) = 1, \quad C_n^n(a) = \omega_n(a)$$

et en vertu de (4)

$$(8)\qquad C_n^s(0) = C_n^s, \quad 0 \leqq s \leqq n-1.$$

Considérons ensuite le coefficient binomial

$$(9)\qquad \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}, \quad n \geqq 1,$$

tandis que nous posons toujours

$$(10)\qquad \binom{x}{0} = 1,$$

même pour $x = 0$, nous aurons immédiatement

$$(11)\qquad \binom{-x}{n} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(12)\qquad \binom{-x+n-1}{n} = (-1)^n \binom{x}{n};$$

de plus, les formules (1) et (9) donneront

$$(13)\qquad \binom{x+n-1}{n} = \frac{\omega_n(x)}{n!};$$

c'est-à-dire que nous aurons, en vertu de (3),

$$(14)\qquad \varDelta\binom{x}{n} = \binom{x-1}{n-1},$$

se qui donnera sans peine la formule suivante

$$(15) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} \binom{x-n+s-1}{s} = \binom{x}{n}, \quad n \geqq 0.$$

Posons ensuite, dans (15), $-x-n$ à la place de x, nous aurons en vertu de (12) cette autre forme de la formule (15)

$$(16) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x}{s} = (-1)^n \binom{x-1}{n}.$$

Remplaçons maintenant, dans (16), x par $x-p$, puis multiplions par

$$\binom{x}{p}$$

les deux membres de la formule ainsi obtenue, l'identité évidente

$$\binom{x}{p}\binom{x-p}{s} = \binom{x}{p+s}\binom{p+s}{s}$$

donnera immédiatement cette autre formule

$$(17) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x}{p+s}\binom{p+s}{s} = (-1)^n \binom{x}{p}\binom{x-p-1}{n}, \quad n \geqq 0.$$

Appliquons ensuite l'identité

$$\binom{x+n-s}{n-s}\binom{x+1}{s} = \frac{x+1}{n!}\binom{n}{s}\omega_{n-1}(x+2-s),$$

nous aurons

$$\sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+n-s}{n-s}\binom{x+1}{s} = \frac{x+1}{n!} \varDelta^n \omega_{n-1}(x+2),$$

ce qui donnera

$$(18) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+n-s}{n-s}\binom{x+1}{s} = 0, \quad n \geqq 1;$$

car $\omega_{n-1}(x+2)$ est un polynome entier du degré $n-1$ par rapport à x.

Quant aux opérations $\varDelta$ et δ, nous aurons en vertu de (14)

$$(19) \qquad \varDelta\binom{x+n}{n+1} = \binom{x+n-1}{n},$$

tandis que le polynome entier $g_n(x)$, déterminé par l'équation aux différences finies

$$(20) \qquad \delta g_n(x) = \binom{x+n-1}{n},$$

se présente sous la forme

$$(21) \qquad g_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{1}{2^{n-s+1}} \cdot \binom{x+s-1}{s}, \quad n \geqq 0.$$

En effet, nous aurons

$$g_0(x) = \frac{1}{2}, \quad g_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4},$$

de sorte que la formule (21) est certainement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit ensuite $n \geq 1$, nous aurons tout d'abord en vertu de (21)

$$g_n(x) = \frac{1}{2} g_{n-1}(x) + \frac{1}{2}\binom{x+n-1}{n}, \tag{22}$$

ce qui donnera

$$\delta g_n(x) = \frac{1}{2}\delta g_{n-1}(x) + \frac{1}{2}\binom{x+n-1}{n} + \frac{1}{2}\binom{x+n-2}{n}. \tag{23}$$

Supposons maintenant, conformément à la formule (20),

$$\delta g_{n-1}(x) = \binom{x+n-2}{n-1},$$

puis appliquons l'identité

$$\binom{x+n-1}{n} = \binom{x+n-2}{n} + \binom{x+n-2}{n-1},$$

la formule (23) montre clairement que $g_n(x)$ satisfait à la condition (20).

Soit particulièrement $x = 0$, la formule (21) donnera

$$g_n(0) = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \geq 0, \tag{24}$$

$$g_n(-1) = -\frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \geq 1, \tag{25}$$

$$g_0(-1) = \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Dans le paragraphe IX nous avons à développer des relations curieuses entre les fonctions $\mathfrak{A}_s^n(x)$, $C_n^s(x)$ et $g_n(x)$.

III. Développements d'un polynome entier.

Revenons maintenant à la formule (24) du paragraphe I, savoir

$$f(\beta+p) = \sum_{s=0}^{s=m}\binom{p}{s}\Delta^s f(\beta+s), \quad m \geq n, \tag{1}$$

où $f(x)$ est un polynome entier du degré n par rapport à x, savoir

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{2}$$

tandis que p désigne un nombre entier non négatif; je dis, que nous aurons l'identité suivante, beaucoup plus générale

$$f(x+\beta) = \sum_{s=0}^{s=m}\binom{x}{s}\Delta^s f(\beta+s), \quad m \geq n, \tag{3}$$

où x et β sont des variables complexes.

En effet, étudions l'équation algébrique (3); elle est du degré m au plus par rapport à x. Néanmoins cette équation admet, en vertu de (1), comme racine un positif entier quelconque; c'est-à-dire que notre équation est une identité.

Remplaçons maintenant, dans (3), toutes les différences qui figurent au second membre par les expressions correspondantes tirées de la formule (2) du paragraphe I, puis ordonnons selon les valeur $f(\beta+p)$, le coefficient de cette expression deviendra, en vertu de la formule (17) du paragraphe II,

$$\sum_{r=0}^{r=m-p}(-1)^r\binom{x}{p+r}\binom{p+r}{r}=(-1)^{m-p}\binom{x}{p}\binom{x-p-1}{m-p},$$

ce qui donnera cette autre forme de la formule (3)

$$f(x+\beta)=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^{m-s}\binom{x}{s}\binom{x-s-1}{m-s}f(\beta+s), \quad m \geqq n. \tag{4}$$

Cela posé, nous aurons particulièrement

$$\left(\frac{\beta}{a}+x\right)^p=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^{m-s}\binom{x}{s}\binom{x-s-1}{m-s}\left(\frac{\beta}{a}+s\right)^p, \quad m \geqq p,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\beta+x)^p=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^{m-s}\binom{\frac{x}{a}}{s}\binom{\frac{x}{a}-s-1}{s}(\beta+as)^p, \quad m \geqq p. \tag{5}$$

Posons maintenant, dans (5),

$$p=n,\ n-1,\ n-2, \ldots, 2, 1, 0,$$

puis multiplions respectivement par

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

les équations ainsi obtenues, nous aurons, en vertu de (2),

$$f(x+\beta)=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^{m-s}\binom{\frac{x}{a}}{s}\binom{\frac{x}{a}-s-1}{m-s}f(\beta+sa), \quad m \geqq n. \tag{6}$$

Changeons encore, dans (6), le signe de a, puis appliquons l'identité (11) du paragraphe II, nous aurons le théorème suivant:

I. Désignons par $f(x)$ un polynome entier quelconque du degré n par rapport à x, par x, a et β des variables complexes, de sorte que a n'est pas égal à zéro, tandis que m est un positif entier assujetti seulement à satisfaire à la condition $m \geqq n$, nous aurons toujours

$$f(x+\beta)=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^s\binom{\frac{x}{a}+s-1}{s}\binom{\frac{x}{a}+m}{m-s}f(\beta-sa), \quad m \geqq n. \tag{7}$$

Soit particulièrement $f(x)=1$, la formule (7) donnera

$$(8)\qquad 1=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^s\binom{\frac{x}{\alpha}+s-1}{s}\binom{\frac{x}{\alpha}+m}{m-s},\qquad m\geqq 0;$$

multiplions ensuite par $f(\beta)$ les deux membres de (8), puis soustrayons la formule ainsi obtenue de (7), nous aurons

$$(9)\quad f(x+\beta)-f(\beta)=\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s\binom{\frac{x}{\alpha}+s-1}{s}\binom{\frac{x}{\alpha}+m}{m-s}\big(f(\beta-s\alpha)-f(\beta)\big),\quad m\geqq n.$$

Enfin, appliquons l'identité évidente

$$\binom{x+s-1}{s}\binom{x+m}{m-s}=\frac{x}{x+s}\binom{m}{s}\binom{x+m}{m},$$

nous aurons cette autre forme de la formule (7)

$$(10)\qquad f(x+\beta)=x\binom{\frac{x}{\alpha}+m}{m}\sum_{s=0}^{s=m}\frac{(-1)^s}{x+\alpha s}\binom{m}{s}f(\beta-s\alpha),\qquad m\geqq n.$$

Dans ce qui suit nous aurons à donner des applications très intéressantes des formules que nous venons de développer. Il est évident, du reste, que ces formules ne sont autre chose que des généralisations très étendues d'un cas special de la formule d'interpolation de Lagrange.

IV. Développements d'une seule puissance.

Appliquons la fonction

$$(1)\qquad \mathfrak{A}_s^n(a)=\Delta^s(a+s)^n=\sum_{r=0}^{r=s}(-1)^r\binom{s}{r}(a+s-r)^n,$$

introduite dans les formules (10) et (11) du paragraphe I, le développement général (3) du paragraphe III donnera

$$(2)\qquad (x+a)^n=\sum_{s=0}^{s=m}\binom{x}{s}\mathfrak{A}_s^n(a),\qquad m\geqq n,$$

d'où en changeant le signe de x, puis appliquant l'identité (11) du paragraphe II

$$(3)\qquad (x-a)^n=\sum_{s=0}^{s=m}(-1)^{n-s}\binom{x+s-1}{s}\mathfrak{A}_s^n(a),\qquad m\geqq n.$$

Posons, dans (3), $a=0$ et $m=n$, la formule particulière ainsi obtenue est appliquée déjà par Fermat pour déterminer les sommes de puissances

$$(4)\qquad s_n(p)=1^n+2^n+3^n+\ldots+p^n$$

pour des petites valeurs de n. La formule particulière en question est indiquée par STIRLING[1]) et retrouvée par beaucoup de géomètres, par exemple KRAMP[2]), HERSCHEL[3]), CAUCHY[4]), PUISEUX[5]).

Dans nos recherches suivantes nous avons besoin d'un autre développement de la puissance x^n.

A cet effet, posons pour abréger

$$\mathfrak{B}_p^{m,n}(a) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{m+1}{s} (a+p-s)^n, \tag{5}$$

où m, n et p désignent des entiers non négatifs, tandis que a est une variable complexe; je dis que nous aurons l'identité suivante

$$\sum_{s=0}^{s=p} \binom{n+p-s}{p-s} \mathfrak{B}_s^{n,r}(a) = (a+p)^r. \tag{6}$$

En effet, introduisons dans (6), au lieu des $\mathfrak{B}_s^{n,r}(a)$, les expressions correspondantes tirées de la définition (5), puis ordonnons selon les puissances $(a+p-q)^r$, le coefficient de cette même puissance deviendra, en vertu de la formule (18) du paragraphe II,

$$\sum_{s=0}^{s=q} (-1)^s \binom{n+q-s}{q-s}\binom{n+1}{s} = 0, \quad q > 0.$$

Cela posé, il est très facile de démontrer le théorème suivant:

I. *Soient x et a des variables complexes, tandis que m et n désignent des nombres entiers tels que $m \geqq n \geqq 0$, nous aurons toujours*

$$(-1)^{m-n}(x-a)^n = \sum_{s=0}^{s=m+1} \binom{x+s-1}{m} \mathfrak{B}_s^{m,n}(a), \quad m \geqq n. \tag{7}$$

En effet, étudions l'équation algébrique (7), dont le degré par rapport à x est égal à m au plus, puis posons

$$x = -p, \quad 1 \leqq p \leqq m+1,$$

nous retrouvons toujours la formule (6).

Dans le cas particulier $m = n$ nous posons pour abréger

$$\mathfrak{B}_p^{n,n}(a) = \mathfrak{B}_p^n(a), \tag{8}$$

ce qui donnera, en vertu de (5)

$$\mathfrak{B}_p^n(a) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{n+1}{s} (a+p-s)^n. \tag{9}$$

---

1) Methodus differentialis, p. 8; Londres 1730.
2) Hindenburg comb. analyt. Abhandlungen t. II, p. 365; Leipsic 1800.
3) Calculus of finite differences; Londres 1820.
4) Résumés analytiques, p. 34—35; Turin 1833.
5) Journal de Mathématiques, t. 11, p. 477—488; 1846.

Soit encore $a = 0$, nous posons de plus

(10) $$\mathfrak{B}_p^{m,n}(0) = \mathfrak{B}_p^{m,n}, \quad \mathfrak{B}_p^{n,n}(0) = \mathfrak{B}_p^n,$$

savoir

(11) $$\mathfrak{B}_p^{m,n} = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{m+1}{s} (p-s)^n,$$

(12) $$\mathfrak{B}_p^n = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{n+1}{s} (p-s)^n.$$

Posons dans (7), $a = 0$ et $m = n$, la formule ainsi obtenue est due à Worpitzky[1]), tandis qu'Euler[2]) a appliqué, le premier, les nombres $\mathfrak{B}_p^n$.

Introduisons maintenant, dans (7), successivement

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

la conclusion ordinaire de q à $q+1$ donnera l'identité remarquable

(13) $$\mathfrak{B}_{m-p+1}^{m,n}(a) = (-1)^{m-n} \mathfrak{B}_p^{m,n}(-a), \quad 0 \leq p \leq m+1,$$

ou, ce qui est la même chose,

(14) $$\mathfrak{B}_{m-p+1}^{m,n}(a) = (-1)^m \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{m+1}{s} (a-p+s)^n.$$

En effet, on voit immédiatement que la formule (13) est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$; supposons ensuite qu'elle soit vraie pour

(15) $$p = 0, 1, 2, \ldots, q-1,$$

puis posons dans (7) $x = q$; introduisons ensuite les expressions correspondantes aux valeurs (15) de p et tirées directement de la formule (14), puis ordonnons selon les expressions

$$(-1)^{m-n-1}(q-s-a)^n,$$

le coefficient correspondant deviendra, en vertu de la formule (18) du paragraphe II,

$$\sum_{r=0}^{r=s-1} (-1)^r \binom{m+s-r}{s-r} \binom{m+1}{r} = (-1)^{s-1} \binom{m+1}{s}, \quad s \geq 1,$$

ce qui nous conduira immédiatement au but.

Soit particulièrement $a = 0$, nous aurons, en vertu de (13),

(16) $$\mathfrak{B}_{m-p+1}^{m,n} = (-1)^{m-n} \mathfrak{B}_p^{m,n}, \quad 1 \leq p \leq m$$

et pour $m = n$

(17) $$\mathfrak{B}_{n-p+1}^n = \mathfrak{B}_p^n, \quad 1 \leq p \leq n,$$

tandis que nous aurons particulièrement

(18) $$\mathfrak{B}_{m+1}^{m,n} = \mathfrak{B}_{n+1}^{n,n} = 0, \quad n > 0.$$

---

[1]) Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232; 1883.

[2]) Institutiones calculi differentialis, p. 487—491; Saint-Pétersbourg 1755.

DEUXIÈME PARTIE.

Sur les fonctions de Bernoulli.

V. Les fonctions $B_n(x)$ et $E_n(x)$.

Les fonctions de Bernoulli

$$(1)\qquad \begin{cases} B_0(x) = 1\,, \\ B_1(x) = x + \dfrac{1}{2}\,, \\ B_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \displaystyle\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!}\,, \end{cases}$$

où les B_r désignent les nombres de Bernoulli, sont parfaitement déterminées à l'aide des deux équations fonctionnelles

$$(2)\qquad B'_n(x) = B_{n-1}(x)\,,$$

$$(3)\qquad \varDelta B_n(x) = B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,,$$

valables pour $n \geqq 1$.

Les fonctions d'Euler

$$(4)\qquad \begin{cases} E_0(x) = \dfrac{1}{2}\,, \\ E_n(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^n}{n!} + \displaystyle\sum_{s=1}^{\leq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} T_s x^{n-2s+1}}{(2s-1)!\,(n-2s+1)!\,2^{2s}}\,, \end{cases}$$

où les T_n sont les coefficients des tangentes, sont déterminées par l'équation aux différences finies

$$(5)\qquad \delta E_n(x) = E_n(x) + E_n(x-1) = \frac{x^n}{n!}\,, \qquad n \geqq 0\,;$$

nous aurons dans ce cas aussi

$$(6)\qquad E'_n(x) = E_{n-1}(x)\,, \qquad n \geqq 1.$$

De plus, nous trouvons les deux équations fonctionnelles

$$(7)\qquad (-1)^n B_n(-x-1) = B_n(x)\,,$$

$$(8)\qquad (-1)^n E_n(-x-1) = E_n(x)\,,$$

valables pour $n \geqq 0$.

Dans ce qui suit nous avons à appliquer l'identité

$$(9)\qquad E_n(x) = 2^n \left(B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right) - B_{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)$$

et la formule de Raabe

$$p^{m-1}\sum_{s=1}^{s=p-1} B_m\left(\frac{x-s}{p}\right) = B_m(x),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$p^{m-1}\sum_{s=0}^{s=p-1}\left(B_m\left(\frac{x-s}{p}\right) - B_m\left(\frac{x}{p}\right)\right) = B_m(x) - p^m B_m\left(\frac{x}{p}\right).$$

Posons $x = 0$ et $m = 2n$, nous aurons particulièrement

$$\sum_{s=0}^{s=p-1}\left(B_{2n}\left(-\frac{s}{p}\right) - B_{2n}(0)\right) = \frac{(-1)^n (p^{2n}-1) B_n}{(2n)!\, p^{2n-1}}, \tag{10}$$

formule qui joue un rôle fondamental dans les recherches profondes de KUMMER[1]) sur le théorème de FERMAT concernant l'équation indéterminée

$$x^n + y^n = z^n.$$

Pour ne pas interrompre le développement de nos recherches sur les représentations dites indépendantes des nombres de BERNOULLI et d'EULER, nous citons ici les valeurs numériques des fonctions $B_n(x)$ et $E_n(x)$ qui se présentent sous forme simple à l'aide des nombres B_n, T_n et E_n, savoir

$$B_0(0) = B_0(-1) = 1; \quad B_{2n}(0) = B_{2n}(-1) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}.$$

$$B_1(0) = -B_1(-1) = \frac{1}{2}; \quad B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(-1) = 0.$$

$$E_0(0) = E_0(-1) = \frac{1}{2}; \quad E_{2n}(0) = E_{2n}(-1) = 0.$$

$$E_{2n+1}(0) = -E_{2n+1}(-1) = \frac{(-1)^n T_{n+1}}{(2n+1)!\, 2^{2n+2}}.$$

$$B_0\left(-\frac{1}{2}\right) = 1; \quad B_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n (2^{2n}-2) B_n}{(2n)!\, 2^{2n}}.$$

$$B_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$E_0\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad E_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\, 2^{2n+1}}.$$

$$E_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$B_{2n}\left(-\frac{1}{3}\right) = B_{2n}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n(3^{2n}-3) B_n}{(2n)!\, 3^{2n}}.$$

$$E_{2n-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = -E_{2n-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n(3^{2n}-3) T_n}{(2n)!\, 6^{2n}},$$

---

[1]) Journal de Crelle, t. 40, p. 122; 1850.

$$B_{2n}\left(-\frac{1}{4}\right) = B_{2n}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1)^n(2^{2n}-2)\,B_n}{(2n)!\,2^{4n}}.$$

$$B_{2n+1}\left(-\frac{1}{4}\right) = -B_{2n+1}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\,2^{4n+2}}.$$

$$B_{2n}\left(-\frac{1}{6}\right) = B_{2n}\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-2)(3^{2n}-3)\,B_n}{(2n)!\,6^{2n}}.$$

Les E_n désignent les nombres d'Euler.

VI. Les sommes $s_n(x, p)$ et $\sigma_n(x, p)$.

Il est évident que les sommes de puissances

$$\text{(1)} \qquad s_n(x, p) = \sum_{s=0}^{s=p-1} (x+s)^n, \quad n \geqq 1,$$

$$\text{(2)} \qquad s_0(x, p) = p,$$

où la dernière définition est à appliquer même dans le cas $x = 0$, sont intimément liées avec les fonctions $B_n(x)$ de Bernoulli.

En effet, l'équation aux différences finies (3) du paragraphe V donnera immédiatement

$$\text{(3)} \qquad B_n(x+p-1) - B_n(x-1) = \frac{s_{n-1}(x, p)}{(n-1)!}, \quad n \geqq 1.$$

Changeons ensuite le signe de x, puis appliquons l'équation fonctionelle (7) du paragraphe V, nous aurons de même

$$\text{(4)} \qquad B_n(x) - B_n(x-p) = \frac{(-1)^{n-1} s_{n-1}(-x, p)}{(n-1)!}, \quad n \geqq 1;$$

posons particulièrement

$$\text{(5)} \qquad s_n(p) = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + p^n, \qquad s_0(p) = p,$$

$$\text{(6)} \qquad t_n(p) = 1^n + 3^n + 5^n + \ldots + (2p-1)^n, \quad t_0(p) = p,$$

nous aurons évidemment

$$\text{(7)} \qquad s_n(p) = s_n(1, p) = (-1)^n s_n(-p, p), \quad n \geqq 0,$$

$$\text{(8)} \qquad t_n(p) = 2^n s_n\left(\frac{1}{2}, p\right), \qquad n \geqq 0.$$

Quant aux fonctions d'Euler, nous avons à étudier les sommes alternées

$$\text{(9)} \qquad \sigma_n(x, p) = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^{p-s-1}(x+s)^n, \quad n \geqq 1,$$

$$\text{(10)} \qquad \sigma_0(x, p) = \frac{1-(-1)^p}{2},$$

où la dernière définition est à appliquer même pour $x = 0$.

Cela posé, nous aurons en vertu de l'équation aux différences finies (5) du paragraphe V

$$E_n(x+p-1)-(-1)^p E_n(x-1) = \frac{\sigma_n(x, p)}{n!}, \quad n \geqq 0, \tag{11}$$

d'où en changeant le signe de x, puis appliquant l'équation fonctionnelle (8) du paragraphe V,

$$E_n(x)-(-1)^p E_n(x-p) = \frac{(-1)^{n+p-1}\sigma_n(-x, p)}{n!}, \quad n \geqq 0. \tag{12}$$

Posons particulièrement

$$\sigma_n(p) = \sum_{s=0}^{s=p-1}(-1)^s (p-s)^n, \quad \sigma_0(p) = \frac{1-(-1)^p}{2}, \tag{13}$$

nous aurons par conséquent

$$\sigma_n(p) = \sigma_n(1, p) = (-1)^{n+p-1}\sigma_n(-p, p), \quad n \geqq 0, \tag{14}$$

tandis que les définitions

$$\tau_n(p) = \sum_{s=0}^{s=p-1}(-1)^s (2p-2s-1)^n, \quad \tau_0(p) = \frac{1-(-1)^p}{2} \tag{15}$$

donnent de même

$$\tau_n(p) = 2^n \sigma_n\left(\frac{1}{2}, p\right), \quad n \geqq 0. \tag{16}$$

Remarquons encore que les deux sommes $s_n(x, p)$ et $\sigma_n(x, p)$ sont liées par les relations

$$\sigma_n(x, 2p) = 2^n\left(s_n\left(\frac{x+1}{2}, p\right) - s_n\left(\frac{x}{2}, p\right)\right), \tag{17}$$

$$\sigma_n(x, 2p+1) = 2^n\left(s_n\left(\frac{x}{2}, p+1\right) - s_n\left(\frac{x+1}{2}, p\right)\right) \tag{18}$$

et que nous aurons de plus

$$s_n(x, p+q) - s_n(x, p) = s_n(x+p, q), \tag{19}$$

$$\sigma_n(x, p+q) - (-1)^q \sigma_n(x, p) = \sigma_n(x+p, q). \tag{20}$$

Soit ensuite d un nombre différent de zéro, nous aurons de même

$$d^n s_n\left(\frac{a}{d}, p\right) = \sum_{s=0}^{s=p-1}(a+sd)^n, \tag{21}$$

$$d^n \sigma_n\left(\frac{a}{d}, p\right) = \sum_{s=0}^{s=p-1}(-1)^{p-s-1}(a+sd)^n, \tag{22}$$

formules qui nous seront utiles dans nos recherches suivantes.

Posons maintenant, dans (3) et (11), $x=1$, nous aurons en vertu de (7) et (14)

$$s_n(p) = n!\left(B_{n+1}(p) - B_{n+1}(0)\right), \tag{23}$$

$$\sigma_n(p) = n!\left(E_n(p) - (-1)^p E_n(0)\right), \tag{24}$$

ce qui donnera la formule, indiquée déjà par JACQUES BERNOULLI[1])

(25) $$s_n(p) = \frac{p^{n+1}}{n+1} + \frac{p}{2} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}}{n+1} \binom{n+1}{2s} p^{n-2s+1}, \quad n \geq 1,$$

tandis que l'expression correspondante pour $\sigma_n(p)$ qui est due à EULER[2]) dépend de la parité de p.

Quant aux deux sommes $s_n(x, p)$ et $\sigma_n(x, p)$, nous avons encore à développer une suite de formules remarquables.

A cet effet, citons tout d'abord les deux développements

(26) $$s_n(x+h, p) = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} s_r(x)\, h^{n-r},$$

(27) $$\sigma_n(x+h, p) = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \sigma_r(x)\, h^{n-r},$$

analogues à la formule binomiale.

Posons encore dans les identités

$$\Delta^{p+1} f(x+p+1) = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \binom{p+1}{r} \big(f(x+p-r+1) - f(x)\big),$$

$$\delta^{p+1} f(x+p+1) = \sum_{r=0}^{r=p} \binom{p+1}{r} \big(f(x+p-r+1) + (-1)^{p-r} f(x)\big),$$

tirées directement des formules (2) et (3) du paragraphe I, $f(x) = B_{n+1}(x-1)$ respectivement $f(x) = E_n(x-1)$, puis appliquons les équations aux différences finies

$$\Delta B_{n+1}(x+p) = \delta E_n(x+p) = \frac{(x+p)^n}{n!},$$

nous aurons pour les fonctions

$$\mathfrak{A}_p^n(x) = \Delta^p (x+p)^n, \quad A_p^n(x) = \delta^p (x+p)^n,$$

introduites dans le paragraphe I, ces deux développements

(28) $$\mathfrak{A}_p^n(x) = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \binom{p+1}{r} s_n(x, p-r+1),$$

(29) $$A_p^n(x) = \sum_{r=0}^{r=p} \binom{p+1}{r} \sigma_n(x, p-r+1),$$

d'où particulièrement pour $x = 0$

---

[1]) Ars conjectandi, p. 95—97; Bâle 1713.

[2]) Institutiones calculi differentialis, p. 499; Saint-Pétersbourg 1755.

$$(30)\qquad \mathfrak{A}_p^n = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{p+1}{r} s_n(p-r)\,,$$

$$(31)\qquad A_p^n = \sum_{r=0}^{r=p-1} \binom{p+1}{r} \sigma_n(p-r).$$

Nous aurons inversement, en vertu de (28) et (29)

$$(32)\qquad s_n(x, p+1) = \sum_{r=0}^{r=p} \binom{p+1}{r} \mathfrak{A}_{p-r}^n(x)\,,$$

$$(33)\qquad \sigma_n(x, p+1) = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \binom{p+1}{r} A_{p-r}^n(x)\,,$$

d'où pour $x = 0$

$$(34)\qquad s_n(p) = \sum_{r=0}^{r=p-1} \binom{p+1}{r} \mathfrak{A}_{p-r}^n\,,$$

$$(35)\qquad \sigma_n(p) = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{p+1}{r} A_{p-r}^n\,.$$

Dans le paragraphe IX nous avons à généraliser beaucoup les formules (32) et (34).

VII. Développements de la première espèce.

Posons dans la formule générale (9) du paragraphe III

$$f(x) = B_n(x)\,,$$

il résulte

$$(1)\qquad B_n(x+\beta) - B_n(\beta) = \sum_{s=1}^{s=m} (-1)^{s-1} \binom{\frac{x}{a}+s-1}{s} \binom{\frac{x}{a}+m}{m-s} \big(B_n(\beta) - B_n(\beta - s a)\big)\,,$$

où il faut supposer $m \geqq n$.

Soit, en premier lieu, a égal au positif entier p, nous aurons en vertu de la formule (4) du paragraphe VI

$$(2)\qquad B_n(x+\beta) - B_n(\beta) = \sum_{s=1}^{s=m} (-1)^{n-s} \binom{\frac{x}{p}+s-1}{s} \binom{\frac{x}{p}+m}{m-s} \frac{s_{n-1}(-\beta, ps)}{(n-1)!}\;;$$

on voit que le cas le plus simple de cette formule correspond à $\beta = 0$, $m = n$.

En second lieu, posons dans (1) $n+1$ à la place de n, différentions par rapport à x, puis posons $x = 0$, nous aurons en remplaçant β par $-x-1$, puis appliquant l'équation fonctionnelle (7) du paragraphe V, la formule remarquable

$$(3)\qquad a B_n(x) = \sum_{q=1}^{q=m} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \binom{m}{q} \big(B_{n+1}(x+q a) - B_{n+1}(x)\big)\,,$$

où il faut supposer par conséquent $m \geqq n+1$.

Supposons de nouveau a égal au positif entier p, nous aurons en vertu de la formule (3) du paragraphe VI

$$(4)\qquad pB_n(x)=\sum_{q=1}^{q=m}\frac{(-1)^{q-1}}{q}\binom{m}{q}\frac{s_n(x+1,\ pq)}{n!}\ ;$$

posons ensuite, dans (3), $a=p+1$, puis soustrayons (4) de la formule ainsi obtenue, il résulte

$$(5)\qquad B_n(x)=\sum_{q=1}^{q=m}\frac{(-1)^{q-1}}{q}\binom{m}{q}\frac{s_n(x+pq+1,\ q)}{n!}.$$

La formule la plus simple de ce genre est évidemment la suivante

$$(6)\qquad B_n(x)=\sum_{q=1}^{q=n+1}\frac{(-1)^{q-1}}{q}\binom{n+1}{q}\frac{s_n(x+1,\ q)}{n!},$$

obtenue de (4) en y posant $p=1$ et $m=n+1$.

Il saute aux yeux que les trois dernières formules générales nous conduiront à un très grand nombre de représentations des B_n et des E_n, si nous introduisons les valeurs particulières

$$x=0,\quad x=-1,\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{3},\quad x=-\frac{2}{3},\quad x=-\frac{1}{4},\quad x=-\frac{3}{4},$$

$$x=-\frac{1}{6},\quad x=-\frac{5}{6},$$

puis appliquons les formules énumérées à la fin du paragraphe V.

Nous nous bornerons à étudier seulement le premier des cas spéciaux susdits, savoir $x=0$. Remplaçons encore n par $2n$, nous aurons, en vertu de (4)

$$(7)\qquad pB_n=\sum_{q=1}^{q=m}\frac{(-1)^{n+q}}{q}\binom{m}{q}s_{2n}(pq),$$

où il faut supposer $m\geq 2n+1$. La formule la plus simple de ce genre, savoir

$$(8)\qquad B_n=\sum_{q=1}^{q=2n+1}\frac{(-1)^{n+q}}{q}\binom{2n+1}{q}s_{2n}(q),$$

est due à KRONECKER[1]).

Quant aux fonctions d'EULER, nous obtenons des résultats analogues aux précédents que nous venons de développer pour les fonctions de BERNOULLI.

En effet, posons dans (4) et (5), $n+1$ au lieu de n et

$$\frac{x}{2},\quad\frac{x-1}{2}$$

à la place de x, puis soustrayons les deux équations ainsi obtenues, il résultent les formules suivantes

[1]) Journal de Crelle, t. 94, p. 268—269; 1883.

$$(9)\qquad pE_n(x) = \sum_{q=1}^{q=m} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \binom{m}{q} \frac{\sigma_{n+1}(x+1,\, 2pq)}{(n+1)\,!},$$

$$(10)\qquad E_n(x) = \sum_{q=1}^{q=m} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \binom{m}{q} \frac{\sigma_{n+1}(x+2pq+1,\, 2q)}{(n+1)\,!},$$

où il faut supposer par conséquent $m \geqq n+1$. La formule la plus simple de ce genre deviendra évidemment

$$(11)\qquad E_n(x) = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \binom{n+1}{q} \frac{\sigma_{n+1}(x+1,\, 2q)}{(n+1)!}.$$

Posons dans les trois dernières formules

$$x=0,\quad x=-1,\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{3},\quad x=-\frac{2}{3},$$

nous obtenons beaucoup de représentations des nombres E_n et T_n; nous nous bornerons à étudier seulement deux de ces hypothèses.

Soit d'abord $x=0$; nous posons, dans (9), $2n-1$ à la place de n, ce qui donnera

$$(12)\qquad \frac{2np\,T_n}{2^{2n}} = \sum_{q=1}^{q=m} \frac{(-1)^{n+q}}{q} \binom{m}{q} \sigma_{2n}(2pq),$$

où il faut supposer par conséquent $m \geqq 2n$. La formule la plus simple de ce genre deviendra

$$(13)\qquad \frac{2n\,T_n}{2^{2n}} = \sum_{q=1}^{q=2n} \frac{(-1)^{n+q}}{q} \binom{2n}{q} \sigma_{2n}(2q).$$

Quant à l'hypothèse $x=-\frac{1}{2}$, nous posons, dans (9), $2n$ à la place de n, ce qui donnera

$$(14)\qquad (2n+1)\,pE_n = \sum_{q=1}^{q=m} \frac{(-1)^{n+q-1}}{q} \binom{m}{q} \tau_{2n+1}(2pq),$$

où il faut supposer par conséquent $m \geqq 2n+1$. La formule la plus simple de ce genre deviendra évidemment

$$(15)\qquad (2n+1)\,E_n = \sum_{q=1}^{q=2n+1} \frac{(-1)^{n+q-1}}{q} \binom{2n+1}{q} \tau_{2n+1}(2q).$$

VIII. Développements de la deuxième espèce.

Prenons maintenant pour point de départ les formules (2) et (3) du paragraphe IV, savoir

$$(1)\qquad (x+a)^n = \sum_{s=0}^{s=m} \binom{x}{s} \mathfrak{A}_s^n(a),$$

$$(2)\qquad (x-a)^n = \sum_{s=0}^{s=m} (-1)^{n-s} \binom{x+s-1}{s} \mathfrak{A}_s^n(a),$$

où il faut supposer $m \geq n$; je dis, que nous obtenons les deux développements suivants pour les fonctions de BERNOULLI

$$(3)\qquad n!\left(B_{n+1}(x+a) - B_{n+1}(a-1)\right) = \sum_{s=0}^{s=m} \binom{x+1}{s+1} \mathfrak{A}_s^n(a),$$

$$(4)\qquad n!\left(B_{n+1}(x-a) - B_{n+1}(-a)\right) = \sum_{s=0}^{s=m} (-1)^{n-s} \binom{x+s}{s+1} \mathfrak{A}_s^n(a).$$

En effet, l'opération Δ nous conduira de (3) et (4) aux formules (1) et (2) respectivement. Posons ensuite, dans (3) et (4), $x=0$, la formule (4) donnera une identité évidente, tandis que nous aurons, en vertu de (3),

$$n!\left(B_{n+1}(a) - B_{n+1}(a-1)\right) = \mathfrak{A}_0^n(a) = a^n,$$

ce qui est une conséquence immédiate de l'équation aux différences finies qui figure dans la définition des fonctions de BERNOULLI, savoir la formule (3) du paragraphe V.

Quant aux applications de (3) et (4), nous posons tout d'abord $x+p$ à la place de x, où p désigne un positif entier; soustrayons ensuite les équations ainsi obtenues, nous aurons respectivement

$$(5)\qquad s_n(x+a+1,\ p) = \sum_{s=0}^{s=m} \left[\binom{x+p+1}{s+1} - \binom{x+1}{s+1}\right] \mathfrak{A}_s^n(a),$$

$$(6)\qquad s_n(x-a+1,\ p) = \sum_{s=0}^{s=m} (-1)^{n-s} \left[\binom{x+p+s}{s+1} - \binom{x+s}{s+1}\right] \mathfrak{A}_s^n(a),$$

ce qui donnera pour $a=0$, $m=n$

$$(7)\qquad s_n(x+1,\ p) = \sum_{s=1}^{s=n} \left[\binom{x+p+1}{s+1} - \binom{x+1}{s+1}\right] \mathfrak{A}_s^n,$$

$$(8)\qquad s_n(x+1,\ p) = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{n-s} \left[\binom{x+p+s}{s+1} - \binom{x+s}{s+1}\right] \mathfrak{A}_s^n,$$

d'où, pour $x=0$, les formules les plus simples de ce genre

$$(9)\qquad s_n(p) = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{p+1}{s+1} \mathfrak{A}_s^n,$$

$$(10)\qquad s_n(p) = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{n-s} \left[\binom{p+s}{s+1} - \binom{p}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n.$$

La formule (9) est démontrée dans toute sa généralité par KRAMP[1]), tandis que FERMAT a appliqué des cas particuliers de la formule en question pour déterminer les premiers des sommes $s_n(p)$. PUISEUX[2]) a développé la formule générale (7) sans connaître évidemment ni la formule de KRAMP ni la formule plus ancienne encore tirée de (1) en y posant $a = 0$.

Posons encore, dans (5), $x = -a$, puis introduisons x à la place de a, nous aurons la formule curieuse

$$(11)\qquad s_n(p) = \sum_{s=0}^{s=n} \left[\binom{p+1-x}{s+1} - \binom{1-x}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n(x),$$

tandis que la formule (6) donnera, pour $x = a$, le résultat analogue

$$(12)\qquad s_n(p) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} \left[\binom{x+p+s}{s+1} - \binom{x+s}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n(x).$$

Quant aux fonctions de BERNOULLI, nous aurons, en vertu de (3) et (4), si nous posons $a = 0$, puis remplaçons m par n

$$(13)\qquad n!\,\big(B_{n+1}(x) - B_{n+1}(-1)\big) = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{x+1}{s+1} \mathfrak{A}_s^n,$$

$$(14)\qquad n!\,\big(B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)\big) = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{n-s} \binom{x+s}{s+1} \mathfrak{A}_s^n,$$

formules qui sont dues à WORPITZSKY[3]); il est évident du reste que la formule (13) est une généralisation de la formule (9) de KRAMP. Néanmoins, la formule de WORPITZKY est une conséquence immédiate de celle de KRAMP, parce que cette dernière formule est valable pour une valeur quelconque du positif entier p.

Différentions maintenant par rapport à x les deux formules (3) et (4), il en résulte

$$(15)\qquad n!\,B_n(x+a) = \sum_{s=0}^{s=n} D_x \left[\binom{x+1}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n(a),$$

$$(16)\qquad n!\,B_n(x-a) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} D_x \left[\binom{x+s}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n(a);$$

[1]) Hindenburg comb. analyt. Abhandlungen, t. II, p. 365; Leipsic 1800.
[2]) Journal de Mathématiques, t. 11, p. 477—488; 1846.
[3]) Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232; 1883.

posons ensuite $x = 0$, puis mettons x à la place de a, nous aurons

$$n!\,B_n(x) = \mathfrak{A}_0^n(x) + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s-1}}{s(s+1)} \mathfrak{A}_s^n(x), \tag{17}$$

$$n!\,B_n(-x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s}}{s+1} \mathfrak{A}_s^n(x). \tag{18}$$

Posons encore, dans (16), $x = 1$, et soit

$$\lambda_q = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{q}, \quad q \geq 1, \tag{19}$$

nous aurons cette autre formule

$$B_n(1-x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} \lambda_{s+1} \mathfrak{A}_s^n(x). \tag{20}$$

Posons, dans (18), $x = 0$, puis introduisons $2n$ à la place de n, il résulte la formule très connue

$$(-1)^n B_n = \sum_{s=1}^{s=2n} \frac{(-1)^{s-1}}{s+1} \mathfrak{A}_s^{2n}.$$

Dans ces jours mêmes M. Kaj Löchte Jensen, un de mes jeunes élèves à l'Université, m'a communiqué une autre demonstration de cette formule particulière.

De plus, M. Löchte Jensen, en prenant pour point de départ la formule en question, a donné une démonstration très simple et nouvelle, je le crois, du célèbre théorème de v. Staudt et de Th. Clausen relatif aux nombres de Bernoulli, savoir la formule (2) du paragraphe XI.

Quant aux fonctions $E_n(x)$ d'Euler, nous introduisons, dans (3) et (4), $x - \frac{1}{2}$ à la place de x, ce qui donnera, en vertu de l'équation fonctionelle (9) du paragraphe V, les développements suivants

$$\frac{n!}{2^n} E_n(2x+2a) = \sum_{s=0}^{s=n} \left[\binom{x+1}{s+1} - \binom{x+\frac{1}{2}}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n(a), \tag{21}$$

$$\frac{n!}{2^n} E_n(2x-2a) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} \left[\binom{x+s}{s+1} - \binom{x+s-\frac{1}{2}}{s+1} \right] \mathfrak{A}_s^n(a); \tag{22}$$

posons ensuite $a = 0$, puis remplaçons x par $\frac{x}{2}$, nous aurons des développements pour $E_n(x)$.

D'autres expressions de ce genre peuvent être obtenues par le procédé suivant:

Posons, dans (21), $x = 0$, puis remplaçons a par $\frac{x}{2}$, nous aurons

$$\frac{n!}{2^n} E_n(x) = \mathfrak{A}_s^n\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\frac{1}{2}}{s+1} \mathfrak{A}_s^n\left(\frac{x}{2}\right), \tag{23}$$

tandis que l'hypothèse $x = -1$ donnera, si nous remplaçons encore a par $\frac{x+1}{2}$, cette autre formule de ce genre

$$(24) \qquad \frac{n!}{2^n} E_n(x) = -\sum_{s=0}^{s=n}{}' \binom{-\frac{1}{2}}{s+1} \mathfrak{A}_s^n\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Quant à la formule (22), posons en premier lieu $x = -\frac{1}{2}$, puis remplaçons a par $\frac{x}{2}$, nous aurons, en vertu de l'équation fonctionnelle (8) du paragraphe V,

$$(25) \qquad \frac{n!}{2^n} E_n(x) = \mathfrak{A}_s^n\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{s=0}^{s=n}{}' (-1)^s \binom{s-\frac{1}{2}}{s+1} \mathfrak{A}_s^n\left(\frac{x}{2}\right).$$

En second lieu, posons $x = 0$, puis remplaçons a par $\frac{x+1}{2}$, le même procédé donnera le résultat analogue

$$(26) \qquad \frac{n!}{2^n} E_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n}{}' (-1)^{s+1} \binom{s-\frac{1}{2}}{s+1} \mathfrak{A}_s^n\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Il est évident du reste que l'on puisse déduire un très grande nombre d'autres formules de ce genre; cependant nous nous bornerons aux formules précédentes, qui sont les plus simples.

Introduisons maintenant, dans les formules que nous venons de développer, les valeurs spéciales de x qui figurent dans les formules énumérées à la fin du paragraphe V, nous aurons évidemment un très grand nombre de représentations, dites indépendantes, pour les B_n, E_n et T_n.

Or, ces formules ne représentent qu'un intérêt très médiocre, parce qu'elles ne donnent aucun résultat d'un intérêt véritable pour les nombres en question; c'est pourquoi nous nous bornerons à ces indications.

On sait que Worpitzky[1]) a developpé un grand nombre des formules de ce genre, sans connaître évidemment le grand Mémoire très-intéressant de van den Berg[2]).

IX. Développements de la troisième espèce.

Étudions maintenant la formule

$$(1) \qquad \binom{x+a+n-1}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} C_n^s(a) x^{n-s},$$

tirée directement des définitions (6) et (13) du paragraphe II, et la formule (3) du paragraphe IV, savoir

$$(2) \qquad (x-a)^n = \sum_{s=0}^{s=n}{}' (-1)^{n-s} \binom{x+s-1}{s} \mathfrak{A}_s^n(a),$$

[1]) Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232; 1883.

[2]) Verslagen en mededeelingen der koninlijke Akademie Amsterdam (2) t. 16, p. 74—176; 1881.

nous aurons immédiatement

$$(3)\qquad g_n(x+a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(n-s)!}{n!} C_n^s(a) E_{n-s}(x),$$

$$(4)\qquad n!\,E_n(x-a) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{n-s} g_s(x)\,\mathfrak{A}_s^n(a),$$

où $g_n(x)$ est la fonction définie et étudiée dans le paragraphe II.

En effet, l'opération δ nous conduira de (3) et (4) à (1) et (2) respectivement, et l'opération inverse de δ détermine parfaitement le polynome en question.

Il est évident que les deux formules (3) et (4) nous donnent plusieurs relations curieuses.

En premier lieu, posons dans (3) $a = 0$, nous aurons

$$(5)\qquad n!\,g_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (n-s)!\,C_n^s E_{n-s}(x),$$

tandis que l'hypothèse $x = 0$ donnera, si nous remplaçons x au lieu de a

$$(6)\qquad n!\,g_n(x) = \frac{1}{2}\,\omega_n(x) + \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s}{2^{2s+2}}\, T_{s+1}\, C_n^{n-2s-1}(x),$$

d'où particulièrement pour $x = 0$

$$(7)\qquad n! = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} (-1)^s\, 2^{n-2s-1}\, C_n^{n-2s-1}\, T_{s+1}.$$

Soit maintenant n égal au nombre premier p, nous aurons

$$C_p^{p-2s-1} \equiv 0 \pmod{p}, \qquad 1 \leq s \leq \frac{p-3}{2},$$

$$C_p^{p-1} = (p-1)!, \quad C_p^0 = 1, \quad T_1 = 1,$$

ce qui donnera, en vertu de (7), si nous posons $p = 2n+1$

$$0 \equiv 2^{p-1}(p-1)! + (-1)^n T_{n+1} \pmod{p};$$

appliquons ensuite les théorèmes de Fermat et de Wilson, il résulte finalement la congruence bien connue

$$(8)\qquad T_{n+1} \equiv (-1)^n \pmod{p}, \qquad p = 2n+1,$$

que nous aurons à généraliser beaucoup dans le paragraphe XIII.

En second lieu, posons dans (4) $a = 0$, nous aurons

$$(9)\qquad n!\,E_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{n-s}\,\mathfrak{A}_s^n\, g_s(x),$$

tandis que l'hypothèse $x = -1$ donnera, en vertu des formules (21) du paragraphe II et (8) du paragraphe V,

$$(10) \qquad n!\,E_n(x) = \frac{1}{2}\mathfrak{A}_0^n(x) + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s-1}}{2^{2s+1}}\mathfrak{A}_s^n(x).$$

Posons encore, dans (3), $x = -\alpha - 1$, puis appliquons l'équation fonctionnelle (8) du paragraphe V, nous aurons en mettant x à la place de α

$$(11) \qquad \frac{(-1)^{n-1}n!}{2^{n+1}} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s (n-s)!\, C_n^s(x)\, E_{n-s}(x)\,,$$

ce qui est une généralisation de la formule (7).

En troisième lieu, posons dans (4) $\alpha = x$, nous aurons ces deux autres formules curieuses

$$(12) \qquad \sum_{s=0}^{s=2n} (-1)^s g_s(x)\, \mathfrak{A}_s^{2n}(x) = 0\,,$$

$$(13) \qquad \sum_{s=0}^{s=2n+1} (-1)^s g_s(x)\, \mathfrak{A}_s^{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n T_{n+1}}{2^{2n+2}}\,,$$

dont la dernière donnera pour $x = 0$

$$(14) \qquad T_{n+1} = \sum_{s=1}^{s=2n+1} (-1)^{n-s+1}\, 2^{2n-s+1}\, \mathfrak{A}_s^{2n+1}.$$

X. Développements de la quatrième espèce.

Nous avons encore à étudier la formule (7) du paragraphe IV, savoir

$$(1) \qquad (-1)^{m-n}(x-\alpha)^n = \sum_{s=0}^{s=m+1} \binom{x+s-1}{m} \mathfrak{B}_s^{m,\,n}(\alpha)\,, \qquad m \geqq n\,,$$

formule qui nous conduira immédiatement à cette autre

$$(2) \qquad (-1)^{m-n} n!\,\big(B_{n+1}(x-\alpha) - B_{n+1}(-\alpha)\big) + (-1)^m \alpha^n = \sum_{s=0}^{s=m+1} \binom{x+s}{m+1} \mathfrak{B}_s^{m,\,n}(\alpha)\,;$$

car l'opération Δ donnera de nouveau la formule (1), et nous aurons de plus pour $x = 0$

$$(-1)^m \alpha^n = \mathfrak{B}_{m+1}^{m,\,n}(\alpha)\,,$$

ce qui est une conséquence immédiate de la formule (14) du paragraphe IV, si nous posons $p = 0$.

Soit particulièrement, dans (2), $\alpha = 0$, nous aurons

$$(3) \qquad (-1)^{m-n} n!\,\big(B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)\big) = \sum_{s=1}^{s=m} \binom{x+s}{m+1} \mathfrak{B}_s^{m,\,n}\,,$$

formule dont le cas $m = n$ appartient à WORPITZKY [1]).

---

[1]) Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232; 1883.

Posons maintenant, dans la formule fondamentale (2), $x+a+p$, puis $x+a$ à la place de x, où p désigne un positif entier; nous aurons en soustrayant les deux formules ainsi obtenues

$$(4) \qquad (-1)^{m-n} s_n(x+1, p) = \sum_{s=0}^{s=m+1} \left[\binom{x+a+p+s}{m+1} - \binom{x+a+s}{m+1} \right] \mathfrak{B}_s^{m,n}(a),$$

ce qui donnera, pour $x=0$, la formule curieuse

$$(5) \qquad (-1)^{m-n} s_n(p) = \sum_{s=0}^{s=m+1} \left[\binom{x+p+s}{m+1} - \binom{x+s}{m+1} \right] \mathfrak{B}_s^{m,n}(x),$$

d'où, pour $x=0$, $m=n$

$$(6) \qquad s_n(p) = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{p+s}{n+1} \mathfrak{B}_s^n,$$

formule qui est analogue à celle de Kramp, savoir la formule (9) du paragraphe VIII.

Différentions encore par rapport à x la formule fondamentale (2), nous aurons

$$(7) \qquad (-1)^{m-n} n!\, B_n(x-a) = \sum_{s=0}^{s=m+1} D_x \left[\binom{x+s}{m+1} \right] \mathfrak{B}_s^{m,n}(a),$$

d'où en posant $x=-1$, puis mettant x à la place de a et appliquant l'équation fonctionnelle (7) du paragraphe V

$$(8) \qquad n!\, B_n(x) = \lambda_{m+1} \mathfrak{B}_0^{m,n}(x) + \sum_{s=0}^{s=m} \frac{(-1)^s s!\,(m-s)!}{(m+1)!} \mathfrak{B}_{s+1}^{m,n}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\lambda_q = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q}, \quad q \geq 1.$$

Posons encore, dans (7), $x=0$, puis remplaçons a par $x+1$, nous aurons de même la formule analogue

$$(9) \qquad n!\, B_n(x) = \lambda_{m+1} \mathfrak{B}_{m+1}^{m,n}(x+1) + \sum_{s=0}^{s=m+1} \frac{(-1)^s s!\,(m-s)!}{(m+1)!} \mathfrak{B}_s^{m,n}(x+1).$$

Quant aux fonctions d'Euler, nous introduisons, dans la formule fondamentale (2), $x-\frac{1}{2}$ à la place de x; soustrayons ensuite les deux formules ainsi obtenues, l'équation fonctionnelle (9) du paragraphe V donnera immédiatement le développement cherché

$$(10) \qquad \frac{(-1)^{m-n} n!}{2^n} E_n(2x-2a) = \sum_{s=0}^{s=m+1} \left[\binom{x+s}{m+1} - \binom{x+s-\frac{1}{2}}{m+1} \right] \mathfrak{B}_s^{m,n}(a).$$

Pour obtenir des formules simples nous posons, en premier lieu, dans (10), $x=-\frac{1}{2}$ et $\frac{x}{2}$ à la place de a, ce qui donnera

$$(11)\qquad \frac{(-1)^{m-n}\, n!}{2^n} E_n(x) = \sum_{s=0}^{s=m+1} \binom{s-\frac{1}{2}}{m+1} \mathfrak{B}_s^{m,n}\left(\frac{x}{2}\right);$$

posons ensuite $x = 0$ et $\frac{x+1}{2}$ à la place de a, nous aurons de même

$$(12)\qquad \frac{(-1)^{m-n}\, n!}{2^n} E_n(x) = \mathfrak{B}_{m+1}^{m,n}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \sum_{s=0}^{s=m+1} \binom{s-\frac{1}{2}}{m+1} \mathfrak{B}_s^{m,n}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Introduisons encore, dans (10), $x = a$ et posons $2n-1$ à la place de n, nous aurons la formule curieuse

$$(13)\qquad \frac{(-1)^{m-1}}{2^{4n-1}} T_n = \sum_{s=0}^{s=m+1} \left[\binom{x+s}{m+1} - \binom{x+s-\frac{1}{2}}{m+1}\right] \mathfrak{B}_s^{m,\,2n-1}(x), \qquad m \geqq 2n-1.$$

Remplaçons, dans les formules générales que nous venons de développer, x par les valeurs spéciales qui figurent dans les formules énumérées à la fin du paragrape V, nous trouvons un très grand nombre de représentations, dites indépendantes, pour les B_n, E_n et T_n.

On sait que Worpitzky[1]) a développé beaucoup de ces formules; cependant, les formules en question ne présentent qu'un intérêt médiocre; c'est pourquoi nous nous bornerons à citer seulement les deux formules suivantes

$$(14)\qquad B_n = \sum_{s=0}^{s=m-1} \frac{(-1)^{n-s-1} s!\,(m-s)!}{(m+1)!} \mathfrak{B}_{s+1}^{m,\,2n}, \qquad m \geqq 2n,$$

$$(15)\qquad \frac{(-1)^m}{2^{4n-1}} T_n = \sum_{s=1}^{s=m} \binom{s-\frac{1}{2}}{m+1} \mathfrak{B}_s^{m,\,2n-1}, \qquad m \geqq 2n-1,$$

obtenues de (8) et (13) en y posant $x = 0$, puis remplaçant, dans (8), n par $2n$.

TROISIÈME PARTIE.

Applications sur la théorie des nombres.

XI. Sur le théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier impair, tel que $p-1$ est diviseur du nombre pair $2n$, nous disons pour abréger que le nombre premier p soit du rang n.

Désignons ensuite par m un positif entier quelconque, il est évident qu'un nombre premier du rang n est du rang mn aussi; le nombre premier 3 est par conséquent d'un rang quelconque.

---

[1]) Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232; 1883.

Soit, au contraire, donné le nombre pair $2n$, l'ensemble des nombres premiers du rang n

$$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots . \lambda_\nu \tag{1}$$

est parfaitement déterminé.

Ces définitions adoptées, le théorème de v. STAUDT [1]) et de TH. CLAUSEN [2]) donnera pour le n-ième nombre de BERNOULLI, B_n, une expression de la forme

$$(-1)^n B_n = A_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots . + \frac{1}{\lambda_\nu}, \tag{2}$$

où A_n est un nombre entier.

Posons ensuite

$$B_n = \frac{a_n}{2b_n}, \tag{3}$$

où la fraction qui figure au second membre est supposée irréductible, nous aurons par conséquent, en vertu de (2),

$$b_n = \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots . \lambda_\nu. \tag{4}$$

Dans ce qui suit nous désignons pour abréger le nombre b_n ainsi défini comme le dénominateur bernoullien du rang n.

SYLVESTER [3]) a démontré que l'expression

$$\frac{a^{2n}(a^{2n}-1)\,B_n}{2n}$$

est toujours un nombre entier, pourvu que a le soit, théorème que je viens de simplifier [4]).

Soit maintenant p un nombre prémier qui n'est pas du rang n, mais qui est diviseur de n, et soit p^q la puissance la plus elevée de p qui divise n; nous désignons par a une racine primitive de la congruence de FERMAT

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cela posé, le produit

$$a^{2n}(a^{2n}-1)$$

ne peut pas être divisible par p, de sorte que nous aurons, en vertu de (3),

$$a_n \equiv 0 \pmod{p^q}. \tag{5}$$

Écrivons ensuite

$$\frac{B_n}{2n} = \frac{a_n}{4nb_n} = \frac{c_n}{d_n}, \tag{6}$$

où la dernière fraction doit être irréductible, tous les nombres premiers impairs qui divisent d_n sont par conséquent du rang n.

---

1) Journal de Crelle, t. 21, p. 372—374; 1840.

2) Astronomische Nachrichten, t. 17, col. 351—352; 1840.

3) Philosophical Magazine, février 1861.

4) Recherches sur les nombres de Bernoulli p. 350 (68); 1913.

Ce théorème est dû à v. Staudt[1]) aussi.

Il est très interessant, ce me semble, que le dénominateur bernoullien du rang n nous permet de généraliser le théorème de Fermat, savoir la congruence

$$a(a^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{7}$$

où p désigne un nombre premier, a un entier quelconque.

En effet, nous aurons immédiatement le théorème suivant:

I. Soient a et n des positifs entiers quelconques, tandis que b_n désigne le dénominateur bernoullien du rang n, nous aurons toujours

$$a(a^{2n}-1) \equiv 0 \pmod{b_n}. \tag{8}$$

Cela posé, nous avons à étudier une expression de la forme

$$\mathfrak{S}_n = \sum_{s=0}^{s=m} a_s \alpha_s^n, \tag{9}$$

où m est un positif entier fixe, quel que soit n; désignons ensuite par r et μ des positifs entiers quelconques, nous aurons immédiatement, en vertu de (7),

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{S}_{n+2s\mu} = \sum_{s=0}^{s=m} a_s \alpha_s^n (1-\alpha_s^{2\mu})^r, \tag{10}$$

ce qui donnera, en vertu de I, cette autre théorème, fondamental dans nos recherches suivantes:

II. Soit, dans (9), tous les a_s et les α_s des nombres entiers qui ne dépendent pas de n, et soit λ le positif entier le plus grand qui satisfait aux deux conditions

$$\lambda \leqq n, \quad \lambda \leqq r, \tag{11}$$

tandis que b_μ désigne le dénominateur bernoullien du rang μ, les nombres $\mathfrak{S}_n$ satisfont aux congruences

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{S}_{n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{b_\mu^\lambda}. \tag{12}$$

Considérons par exemple les trois nombres

$$\mathfrak{A}_q^n = \sum_{s=0}^{s=m} (-1)^s \binom{q}{s} (q-s)^n, \quad m \geqq q,$$

$$A_q^n = \sum_{s=0}^{s=m} \binom{q}{s} (q-s)^n, \quad m \geqq q,$$

$$\mathfrak{B}_q^{m,n} = \sum_{s=0}^{s=q-1} (-1)^s \binom{m+1}{s} (q-s)^n$$

[1]) De numeris Bernoullianis commentatio altera; Erlangue 1845.

que nous venons d'étudier et d'appliquer dans les paragraphes précédents, nous aurons par conséquent les congruences

$$(13)\qquad \mathfrak{A}^r_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{A}_q^{n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{b_\mu^\lambda},$$

$$(14)\qquad A^r_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} A_q^{n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{b_\mu^\lambda},$$

$$(15)\qquad C^r_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{B}_q^{m,\,n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{b_\mu^\lambda},$$

valables quel que soit q.

Dans ce qui suit nous avons à appliquer d'autres résultats tirés directement de l'identité (10).

En effet, soient a et b deux positifs entiers sans diviseur commun, et soit p un nombre premier du rang n, qui ne divise pas b, nous aurons

$$\frac{a}{b}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1\right) b^{2n+1} = a(a^{2n}-1) - a(b^{2n}-1),$$

et le second membre de cette formule est par conséquent divisible par p. Dans ce cas nous écrivons simplement

$$(16)\qquad \frac{a}{b}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1\right) \equiv 0 \pmod{p},$$

Cette définition adoptée, nous aurons, en vertu de (10), cet autre théorème:

III. Soient, dans la définition (9), tous les α_s et les a_s des fractions irréductibles, dont tous les dénominateurs sont premiers au nombre premier p du rang μ, nous aurons, avec la définition (11) du nombre λ,

$$(17)\qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{S}^{n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Dans nos recherches suivantes nous avons à appliquer d'autres formes des congruences (12) et (17).

A cet effet, posons pour abréger

$$(18)\qquad \alpha_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{S}_{n+2s\mu},$$

$$(19)\qquad \beta_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \omega^{2s\mu} \mathfrak{S}_{n+2s\mu},$$

nous avons tout d'abord à démontrer les deux identités suivantes

$$(20)\qquad \beta_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} (\omega^{2\mu}-1)^s \alpha_{n+2s\mu,\, r-s},$$

$$(21)\qquad \alpha_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{r}{s} (\omega^{2\mu}-1)^s \beta_{n+2s\mu,\, r-s}.$$

Pour démontrer la formule (20) nous introduisons dans le terme sommatoire qui figure au second membre de (19)

$$\omega^{2s\mu} = \left[(\omega^{2\mu}-1)+1\right]^s = \sum_{\nu=0}^{\nu=s} \binom{s}{\nu} (\omega^{2\mu}-1)^\nu ;$$

ordonons ensuite selon les puissances $(\omega^{2\mu}-1)^\nu$, puis appliquons l'identité évidente

$$\binom{r}{s}\binom{s}{\nu} = \binom{r}{\nu}\binom{r-\nu}{s-\nu},$$

nous aurons la formule (20).

Quant à la formule inverse (21), nous multiplions le terme sommatoire qui figuré au second membre de (18) par

$$1 = \left[\omega^{2\mu} - (\omega^{2\mu}-1)\right]^s = \sum_{\nu=0}^{\nu=s} (-1)^\nu \binom{s}{\nu} \omega^{2\mu(s-\nu)} (\omega^{2\mu}-1)^\nu ,$$

et le même procédé que dans le cas précédent nous conduira à la formule (21).

Cela posé, nous aurons immédiatement les deux théorèmes suivants:

IV. Supposons remplies les conditions énumerées dans le théorème II, puis supposons que ω soit un positif entier premier au dénominateur bernoullien du rang μ, les deux congruences

$$(22)\qquad \alpha_{n,r} \equiv 0 \pmod{b_\mu{}^\lambda},$$

$$(23)\qquad \beta_{n,r} \equiv 0 \pmod{b_\mu{}^\lambda}$$

sont équalentes,

V. Supposons remplies les conditions exigées par la formule (17), puis désignons par ω une fraction irréductible, dont ni le numérateur ni le dénominateur n'est divisible par le nombre premier p, les deux congruences

$$(24)\qquad \alpha_{n,r} \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

$$(25)\qquad \beta_{n,r} \equiv 0 \pmod{p^\lambda}$$

sont équivalentes.

Dans ce qui suit nous avons besoin de quelques autres résultats tirés des congruences (12) et (17).

A cet effet, posons pour abréger

$$(26)\qquad h_q(x) = x(x-1)\dots(x-q+1), \quad h_0(x) = 1,$$

$$(27)\qquad A_{q,r} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^r \binom{r}{s} h_q(n+2s\mu)\, \Omega_{n+2s\mu},$$

les identités évidentes

$$(n+2r\mu-q)\binom{r}{s}h_q(n+2s\mu)-2r\mu\binom{r-1}{s}h_q(n+2s\mu)=\binom{r}{s}h_{q+1}(n+2s\mu),$$

où il faut supposer $0\leq s\leq r-1$, et

$$(n+2r\mu-q)\,h_q(n+2r\mu)=h_{q+1}(n+2r\mu),$$

donnent, quel que soit q, pour les $A_{q,r}$ la formule récursive

$$(n+2r\mu-q)A_{q,r}-2r\mu A_{q,\,r-1}=A_{q+1,\,r}. \tag{28}$$

Cela posé, la conclusion ordinaire de q à $q+1$ donnera, en vertu de (12) et (17), la congruence plus générale

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{n+2s\mu}{q}\mathfrak{L}_{n+2s\mu}\equiv 0 \pmod{p^{\lambda-q}}, \tag{29}$$

où p désigne un nombre premier du rang μ, et où il faut supposer à la fois $q<\lambda$ et $q<p$.

XII. Applications sur les fonctions de Bernoulli.

Pour donner une application intéressante des theorèmes généraux que nous venons de démontrer, nous prenons pour point de départ une quelconque des deux formules (14) du paragraphe VIII ou (3) du paragraphe X, savoir

$$n!\,\bigl(B_{n+1}(x)-B_{n+1}(0)\bigr)=\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^{n-s}\binom{x+s}{s+1}\mathfrak{A}_s^n,\qquad m\geq n. \tag{1}$$

$$n!\,\bigl(B_{n+1}(x)-B_{n+1}(0)\bigr)=(-1)^{m-n}\cdot\sum_{s=1}^{s=m}\binom{x+s}{m+1}\mathfrak{B}_s^{m,n},\qquad m\geq n, \tag{2}$$

qui correspond à

$$x=-\frac{\alpha}{\gamma}, \tag{3}$$

où α et γ désignent des positifs entiers sans diviseur commun.

Désignons tout d'abord par r un positif entier quelconque, puis posons

$$\binom{\pm\frac{\alpha}{\gamma}}{r}=\pm\frac{A}{B}, \tag{4}$$

où la fraction qui figure au second membre doit être irreductible; je dis, que le dénominateur B ne peut contenir d'autres facteurs premiers que ceux qui divisent γ.

En effet, nous aurons en vertu de (4),

$$\pm\frac{A}{B}=\frac{\pm\alpha(\pm\alpha-\gamma)(\pm\alpha-2\gamma)\ldots\bigl(\pm\alpha-(r-1)\gamma\bigr)}{r!\,\gamma^r}; \tag{5}$$

soit ensuite p un nombre premier égal à r au plus, qui ne divise pas γ, tandis que p^q est une puissance de p qui divise $r!$; nous posons

$$r = ap^q + b, \quad a \geqq 1, \quad 0 \leqq b \leqq p^q - 1.$$

Cela posé, il est évident que la factorielle $r!$ contient précisément, comme facteurs, les a multiples suivants de p^q:

$$p^q, \; 2p^q, \; 3p^q, \; \ldots, \; ap^q.$$

Étudions maintenant l'équation indéterminé du premier degré

$$-\gamma x \pm a = p^q y,$$

elle admet des solutions entières de x et y, parce que γ et p^q sont sans diviseur commun. Soit x_1 la valeur de x qui satisfait à la condition

$$0 \leqq x_1 \leqq p^q - 1,$$

une valeur quelconque de x se présente sous la forme

$$x = x_1 + sp^q,$$

où s désigne un nombre entier; c'est-à-dire que le numérateur de la fraction qui figure au second membre de (5) contient précisément comme facteurs les a multiples suivants de p^q:

$$\pm a - \gamma(x_1 + sp^q), \quad 0 \leqq s \leqq a - 1.$$

Ces résultats obtenus, il est évident que la puissance p^q disparaîtra dans la fraction irréductible, de sorte que B ne peut contenir d'autres facteurs premiers que ceux qui divisent γ.

Cela posé, nous aurons le théorème suivant:

I. Désignons par a et γ deux positifs entiers sans diviseur commun, par p un nombre premier du rang μ, qui ne divise pas γ, et par n et r des positifs entiers quelconques, les nombres rationnels

$$\mathfrak{Q}_n = n!\left(B_{n+1}\left(-\frac{a}{\gamma}\right) - B_{n+1}(0)\right) \tag{6}$$

satisfont aux congruences

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathfrak{Q}_{n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{p^\lambda}, \tag{7}$$

où λ est le plus grand positif entier qui satisfait aux deux conditions

$$\lambda \leqq r, \quad \lambda \leqq n. \tag{8}$$

En effet, prenons par exemple pour point de départ la formule (1), nous aurons une expression de la forme

$$\mathfrak{Q}_n = \sum_{s=1}^{s=m} k_s(a, \gamma)\, \mathfrak{A}_s^n, \quad m \geqq n. \tag{9}$$

où les $k_s(a, \gamma)$ désignent des fractions irréductibles, dont les dénominateurs ne contiennent d'autres facteurs premiers que ceux qui divisent γ.

Posons ensuite, comme dans la formule (13) du paragraphe XI,

$$\mathfrak{A}_{n,s}^{r} = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} \mathfrak{A}_{s}^{n+2\nu\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}},$$

nous aurons, en vertu de (9),

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s} \binom{r}{s} \mathfrak{L}_{n+2s\mu} = \sum_{s=1}^{s=m} k_s(a,\gamma) \mathfrak{A}_{n,s}^{r}, \tag{10}$$

où le positif entier quelconque m est à déterminer de sorte que

$$m \geqq n + 2r\mu,$$

ce qui donnera immédiatement la formule (7).

Posons maintenant, dans (6) et (9), $\frac{a}{2}$ puis $\frac{a+\gamma}{2}$ à la place de a, puis soustrayons les deux équations ainsi obtenues, nous aurons

$$n!\,E_n\left(-\frac{a}{\gamma}\right) = \sum_{s=1}^{s=m} l_s(a,\gamma) \mathfrak{A}_{s}^{n}, \quad m \geqq n, \tag{11}$$

où les $l_s(a,\gamma)$ sont des fractions irreductibles, dont les dénominateurs ne contiennent que de tels facteurs premiers qui divisent 2γ.

Cela posé, nous aurons le théorème suivant, analogue à I:

II. Supposons remplies les conditions indiquées dans le théorème I, les nombres rationnels

$$\mathfrak{L}_n' = n!\,E_n\left(-\frac{a}{\gamma}\right) \tag{12}$$

satisfont aux congruences

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s} \binom{r}{s} \mathfrak{L}_{n+2s\mu}' \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}}. \tag{13}$$

Il est digne de remarque, ce me semble, que l'expression (6), savoir

$$\mathfrak{L}_n = n!\left(B_{n+1}\left(-\frac{a}{\gamma}\right) - B_{n+1}(0)\right),$$

joue un rôle fondamental dans mes recherches sur les résidus quadratiques.

En effet, soit $p = 2n+1$ un nombre premier impair, et soit a un entier tel que $1 \leqq a \leqq p-1$; je désigne par $R(a)$ et $I(a)$ les nombres des résidus respectivement des non-résidus de p, qui se trouvent parmi les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ a.$$

Ces définitions adoptées, j'ai trouvé

$$R(a) - I(a) \equiv n!\left[B_{n+1}\left(-\frac{a}{\gamma}\right) - B_{n+1}(0)\right] = \mathfrak{L}_n \pmod{p}, \tag{14}$$

où il faut supposer

$$(15) \qquad \gamma a + \alpha = p, \quad 1 \leq \alpha \leq a-1;$$

c'est-à-dire que la formule (9) donnera une représentation indépendante de la différence

$$R(a) - I(a).$$

De plus, soient $R_{a,b}$ et $I_{a,b}$ les nombres des résidus respectivement des non-résidus de p, qui se trouvent parmi les termes de la série arithmétique

$$b, \; b+a, \; b+2a, \ldots, \; b+qa,$$

où il faut admettre

$$b+qa < p, \quad 1 \leq b \leq a,$$

j'ai trouvé de même

$$(16) \qquad R_{a,b} - I_{a,b} \equiv n!\, a^n \left[B_{n+1}\left(-\frac{c}{a}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{a-b}{a}\right)\right] \pmod{p},$$

où il faut supposer

$$b + aq + c = p, \quad 0 \leq c \leq a-1.$$

Cela posé, il est évident que

$$R_{a,b} - I_{a,b}$$

n'est autre chose que la différence de deux expressions $\mathfrak{K}_n$, multipliée par a^n.

XIII. Sur les nombres E_n et T_n.

Il est évident que les deux théorèmes généraux démontrés dans le paragraphe précédent, combinés avec les formules numériques énoncées à la fin du paragraphe V, nous conduiront à plusieurs cas particuliers très intéressants.

En premier lieu, posons dans la formule (7) du paragraphe XII

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 2$$

et introduisons $2n-1$ à la place de n, nous aurons

$$\mathfrak{K}_{2n-1} = \frac{(-1)^n T_n}{2^{4n}},$$

ce qui donnera, en vertu du théorème IV du paragraphe XI,

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} T_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{b_\mu^\lambda},$$

où b_μ désigne le dénominateur bernoullien du rang μ, tandis que λ est à déterminer comme le positif entier le plus grand qui satisfait aux deux conditions

$$(2) \qquad \lambda \leq 2n-1, \quad \lambda \leq r.$$

Remplaçons, dans (1), le module b_μ par le nombre $p = 2\mu + 1$, supposé premier, la congruence ainsi obtenue est due à Stern [1]).

[1]) Journal de Crelle, t. 88, p. 91; 1880.

En second lieu, posons dans la même formule générale

$$a = 1, \quad \gamma = 4,$$

puis posons $2n$ à la place de n, nous aurons

$$\mathfrak{L}_{2n} = \frac{(-1)^n E_n}{2^{4n+2}},$$

ce qui donnera, en vertu du théorème IV du paragraphe XI,

(3) $$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} E_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{b_\mu^\lambda},$$

où il faut supposer à la fois

(4) $$\lambda \leq 2n, \quad \lambda \leq r.$$

Remplaçons, dans (3), le module b^μ par le nombre $p = 2\mu + 1$, supposé premier, la congruence ainsi obtenue est due à KUMMER[1]).

Appliquons maintenant la congruence (29) du paragraphe XI, nous aurons, en vertu de (1) et (3),

(5) $$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} \binom{n+s\mu}{q} T_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda-q}},$$

(6) $$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} \binom{n+s\mu}{q} E_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda-q}},$$

où p désigne un nombre premier du rang μ, et où il faut supposer $q < \lambda$ et $q < p$.

Soit encore, dans (1) et (3), $r = 1$, nous aurons particulièrement

(7) $$E_{n+\mu} \equiv (-1)^\mu E_n \pmod{b_\mu},$$

(8) $$T_{n+\mu} \equiv (-1)^\mu T_n \pmod{b_\mu},$$

d'où pour $n = 1$.

(9) $$T_{\mu+1} \equiv E_{\mu+1} \equiv (-1)^\mu \pmod{b_\mu}.$$

La dernière congruence qui correspond au nombre $T_{\mu+1}$ est due à feu M. SAALSCHÜTZ[2]).

Remarquons en passant que les deux formules très connues

$$2^{2n+1}\sigma_{2n}(m) = (2m+1)^{2n} + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{2n}{2s} E_s (2m+1)^{2n-2s},$$

$$2^{2n+2}\sigma_{2n+1}(m) = (2m+1)^{2n+1} + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{2n+1}{2s} T_s (2m+1)^{2n-2s+1} - (-1)^{m+n} T_{n+1},$$

où m et n désignent des positifs entiers quelconques, nous conduiront sans peine aux deux congruences (1) et (4).

---

1) Journal de Crelle, t. 41, p. 372; 1851.

2) Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, p. 165; Berlin 1893.

En effet, nous aurons immédiatement

(10) $$2^{2n+1}\sigma_{2n}(m) \equiv (-1)^n E_n \pmod{2m+1},$$

(11) $$2^{2n+2}\sigma_{2n+1}(m) \equiv (-1)^{m+n-1} T_{n+1} \pmod{2m+1},$$

ce qui nous conduira au but, si nous posons

$$2m+1 = b_\mu^\lambda.$$

Nous avons encore à appliquer la congruence (10) pour déduire une propriété nouvelle de nombres d'EULER.

A cet effet, posons conformément à la formule (10) du paragraphe VI

$$1-(-1)^m = 2\sigma_0(m) = 2\cdot\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^{m-s},$$

nous aurons, en vertu de (10),

(12) $$1-(-1)^m-(-1)^n E_n \equiv 2\cdot\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^{m-s}\left(1-(2s)^{2n}\right) \pmod{2m+1}.$$

Cela posé, divisons en deux parties l'ensemble des nombres premiers du rang n

$$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \ldots\ \lambda_\nu,$$

savoir

$$\lambda_1'\ \lambda_2'\ \lambda_3'\ \ldots\ \lambda_\sigma',$$

$$\lambda_1''\ \lambda_2''\ \lambda_3''\ \ldots\ \lambda_\tau'',$$

où nous avons toujours

$$\lambda_s' = 4a+1, \quad 1 \leqq s \leqq \sigma,$$

$$\lambda_s'' = 4a+3, \quad 1 \leqq s \leqq \tau;$$

c'est-à-dire que nous aurons $\sigma+\tau = \nu$.

Posons ensuite pour abréger

(13) $$\begin{cases} k_n = \lambda_1'\ \lambda_2'\ \lambda_3'\ \ldots\ \lambda_\sigma', \\ l_n = \lambda_1''\ \lambda_2''\ \lambda_3''\ \ldots\ \lambda_\tau'', \end{cases}$$

nous aurons par conséquent

(14) $$k_n l_n = b_n,$$

où b_n désigne le dénominateur bernoullien du rang n.

Introduisons, dans (12),

(15) $$2m+1 = b_n;$$

désignons ensuite par p un nombre premier du rang n, et posons

(16) $$b_n = p\cdot q,$$

nous aurons évidemment

$$m = \frac{b_n-1}{2} = p\cdot\frac{q-1}{2}+\frac{p-1}{2};$$

c'est-à-dire que l'ensemble

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.,\ m$$

contient précisément les multiples suivants de p:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots.,\ \frac{q-1}{2}p.$$

Cela posé, nous aurons en vertu de (12)

$$1-(-1)^m-(-1)^n E_n \equiv 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}(-1)^{m-s} \pmod{p},$$

ou, ce qui est la même chose

(17) $$1-(-1)^m-(-1)^n E_n \equiv (-1)^{m-1}2\cdot\sigma_0\left(\frac{q-1}{2}\right) \pmod{p}.$$

Soit maintenant, en premier lieu,

$$b_n = 4a+1\,,\quad m=2a\,,$$

les deux nombres p et q seront en même temps de la forme $4r+1$ ou $4r+3$; c'est-à-dire que nous aurons

$$\sigma_0\left(\frac{p-1}{2}\right)=\sigma_0\left(\frac{q-1}{2}\right),$$

ce qui donnera, en vertu de (17),

(18) $$\begin{cases} E_n \equiv 0 \pmod{p}, & p=4r+1\,, \\ E_n\equiv(-1)^n 2 \pmod{p}, & p=4r+3. \end{cases}$$

Soit maintenant, en second lieu,

$$b_n=4a+3\,,\quad m=2a+1\,,$$

les deux nombres $p+2$ et q seront en même temps de la forme $4r+1$ ou $4r+3$, ce qui donnera en vertu de (17)

$$2-(-1)^n E_n \equiv 2\sigma_0\left(\frac{p+1}{2}\right) \pmod{p};$$

c'est-à-dire que les deux congruences (18) sont valables dans ce cas aussi.

Cela posé, nous avons démontré le théorème suivant, nouveau je le crois:

I. Soient k_n et l_n les deux facteurs complémentaires du dénominateur bernoullien du rang n, définis par les expressions (13), les nombres d'Euler satisfont aux congruences

(19) $$E_n\equiv 0 \pmod{k_n},$$

(20) $$E_n\equiv(-1)^n 2 \pmod{l_n}.$$

Soit particulièrement $p=2n+1$ un nombre premier, nous aurons pour n pair, savoir $n=2m$,

(21) $$E_{2m}\equiv 0 \pmod{p},\quad p=4m+1\,,$$

tandis que l'hypothèse $n=2m+1$ donnera

(22) $$E_{2m+1}\equiv -2 \pmod{p},\quad p=4m+3.$$

Ces deux congruences spéciales sont indiquées par M. ELY [1]).

Il saute aux yeux que notre méthode générale est en défaut quand il s'agit de déterminer les exposants K et K' dans les congruences

$$(23) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} T_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{2^K},$$

$$(24) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} E_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{2^{K'}}.$$

Appliquons la formule très connue

$$T_{2m+1} = 2^{4m}(2q_m+1), \quad m \geqq 0,$$

où $q_m \geqq 0$ désigne un nombre entier, nous aurons toujours, quels que soient r et μ,

$$(25) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} T_{2n+2s\mu+1} \equiv 0 \pmod{2^{4n}};$$

soit particulièrement $\mu = 1$, nous aurons en vertu de la congruence (1), et en remarquant que le nombre premier 5 est du rang 2,

$$(26) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} T_{2n+2s+1} \equiv 0 \pmod{10^\lambda},$$

où il faut supposer à la fois $\lambda \leqq r \leqq 4n$.

STERN [2]) a essayé, le premier, à déterminer les exposants K et K' qui figurent dans les congruences (23) et (24) qui correspondent à $\mu = 2$; cependant, il applique des series divergentes, et il est très curieux, ce me semble, que cette ancienne méthode à conduit, dans ce cas, à des résultats parfaitement faux.

Feu M. SAALSCHÜTZ [3]) a observé que le résultat susdit de STERN rélatif aux coefficients des tangentes est inexact. Néanmoins, M. P. BACHMANN [4]), dans sons beau Livre sur la théorie des nombres, donne le développement de STERN, sans des reservations quelconques. Il me ne semble pas sûr que M. BACHMANN [5]) a détourné les difficultés en question, dans sa Note récente.

De plus, il est une conséquence immédiate des recherches récentes de MM. FROBENIUS [6]) et HAUSSNER [7]), que le résultat de STERN relatif aux nombres d'EULER est faux aussi.

---

[1]) American Journal of Mathematics, t, 5, p. 341; 1880.
[2]) Journal de Crelle, t. 79, p. 67—98; 1875.
[3]) Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, p. 164; Berlin 1893.
[4]) Niedere Zahlentheorie, t. II, p. 40; Leipsic 1910.
[5]) Grunert Archiv (3), t. 16, p. 363—365; 1910.
[6]) Berliner Berichte, 1910, p. 809—847.
[7]) Berichte der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, t. 62, p. 386—418; 1910.

XIV. Sur la congruence de Kummer.

Introduisons maintenant, dans la formule fondamentale (7) du paragraphe XII, $2n-1$ à la place de n, puis posons successivement

$$a = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \gamma-1,$$

nous aurons, en ajoutant toutes les congruences ainsi obtenues, et en appliquant ensuite la formule de KUMMER, savoir

$$\sum_{s=0}^{s=\gamma-1}\left(B_{2n}\left(-\frac{s}{\gamma}\right)-B_{2n}(0)\right)=\frac{(-1)^n(\gamma^{2n}-1)B_n}{(2n)!\,\gamma^{2n+1}},$$

citée comme la formule (10) du paragraphe V,

$$(1)\qquad \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{s+s\mu}\binom{r}{s}\frac{(\gamma^{2n+2s\mu}-1)B_{n+s\mu}}{(2n+2s\mu)\gamma^{2n+2s\mu-1}}\equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

où il faut supposer à la fois

$$(2)\qquad \lambda \leqq 2n-1\,,\quad \lambda \leqq r\,,$$

tandis que p est un nombre premier du rang μ, qui ne divise pas le positif entier γ.

Appliquons maintenant le théorème IV du paragraphe XI, la congruence (1) se transforme dans celle-ci

$$(3)\qquad \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{s+s\mu}\binom{r}{s}\frac{(\gamma^{2n+2s\mu}-1)B_{n+s\mu}}{2n+2s\mu}\equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Posons pour abréger

$$(4)\qquad a_{n,r}=\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{s+s\mu}\binom{r}{s}\frac{B_{n+s\mu}}{2n+2s\mu},$$

tandis que $\delta_{n,r}$ désigne le premier membre de (3), la formule (20) du paragraphe XI donnera l'identité

$$(5)\qquad \delta_{n,r}=(\gamma^{2n}-1)a_{n,r}+\gamma^{2n}\cdot\sum_{s=1}^{s=r}(-1)^{s\mu}\binom{r}{s}(\gamma^{2\mu}-1)^s a_{n+s\mu,\,r-s}.$$

Supposons ensuite que le nombre premier p du rang μ ne soit pas du rang n aussi, et désignons par γ une racine primitive de la congruence de FERMAT

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p},$$

la différence $\gamma^{2n}-1$ qui figure au second membre de (5), comme coefficient de $a_{n,r}$ ne peut jamais être divisible par p.

De plus, soit conformément à la formule (6) du paragraphe XI

$$(6)\qquad \frac{B_{n+s\mu}}{2n+2s\mu}=\frac{a_{n+s\mu}}{d_{n+s\mu}},$$

où la fraction qui figure au second membre est supposée irréductible, nous savons, en vertu du théorème de v. STAUDT mentionné dans le paragraphe XI, que le dénominateur $d_{n+s\mu}$ ne peut jamais être divibible par p.

Cela posé, introduisons dans (5) successivement

$$r = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

la conclusion ordinaire de r à $r+1$ donnera immédiatement la congruence

$$(7) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} \frac{B_{n+s\mu}}{2n+2s\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}},$$

où il faut supposer à la fois

$$(8) \qquad \lambda \leq 2n-1, \quad \lambda \leq r;$$

le cas particulier $p = 2\mu+1$ est précisément la congruence de KUMMER[1]).

Appliquons maintenant la formule (29) du paragraphe XI, nous aurons, avec la définition (8) de l'exposant λ,

$$(9) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} B_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda-1}}$$

et plus généralement

$$(10) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} \binom{n+s\mu}{q} B_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda-q-1}},$$

où il faut supposer à la fois $q < \lambda - 1$ et $q < p$; ces deux dernières formules semblent être nouvelles. Il est évident que la congruence (9) est analogue aux congruences (1) et (3) du paragraphe XIII pour les T_n et les E_n.

Posons particulièrement, dans (7), $p = 2\mu + 1$, $r = 1$, nous aurons

$$n B_{n+\mu} \equiv (-1)^{\mu} (n+\mu) B_n \pmod{p},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(11) \qquad 2n B_{n+\mu} \equiv (-1)^{\mu} (2n-1) B_n \pmod{p};$$

soit ensuite $\mu = 2m+1$, savoir $p = 4m+3$, nous aurons, en posant dans (11), $n = m+1$, la congruence intéressante

$$(12) \qquad B_{3m+2} \equiv B_{m+1} \pmod{p}, \quad p = 4m+3.$$

Revenons maintenant à la formule générale (7); nous avons supposé que le nombre premier p du rang μ ne soit pas du rang n aussi. Or, cette condition suffisante n'est pas nécessaire pour l'existence d'une congruence de la forme (7); mais l'exposant λ de p n'est naturellement pas déterminé par les conditions (8).

En effet, prenons pour point de départ la somme de puissances

$$s_{2n}(a) = 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \ldots + a^{2n},$$

nous aurons

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} s_{2n+2\nu\mu}(a) = \sum_{s=1}^{s=a} s^{2n} (1 - s^{2\mu})^{r};$$

---

[1]) Journal de Crelle, t. 41, p. 368—372; 1851.

soit ensuite p un nombre premier du rang μ, et soit encore $a \leqq p-1$, nous aurons par conséquent, quel que soit le positif entier n,

$$(13) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} s_{2n+2\nu\mu}(a) \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Or, nous aurons, en vertu de la formule (25) du paragraphe VI,

$$s_{2m}(p-1) = \frac{p^{2m+1}}{2m+1} - \frac{p^{2m}}{2} + \sum_{s=1}^{s=m} \frac{(-1)^{s-1}}{2m-2s+1} \binom{2m}{2s} B_s p^{2m-2s+1},$$

ce qui nous conduira à la congruence

$$(14) \qquad s_{2m}(p-1) \equiv (-1)^{m-1} B_m p \pmod{p^2},$$

où il faut supposer $p \geqq 5$, $m \geqq 1$.

En effet, nous aurons toujours

$$\frac{B_r p^q}{q} \equiv 0 \pmod{p^2},$$

pourvu que $p \geqq 5$, $q \geqq 3$. Il est évident que le cas le plus désavantageux est celui où p est du rang r et où q est en même temps divisible par p. Soit p^a la puissance la plus élevée de p qui divise q, le dénominateur de la fraction

$$\frac{B_r}{q},$$

considérée comme étant irréductible, est dans ce cas divisible précisément par p^{a+1}. Nous avons par conséquent à démontrer que

$$q-3 \geqq a.$$

Or, nous aurons évidemment

$$q \geqq p^a = \bigl(1+(p-1)\bigr)^a \geqq 1 + a(p-1),$$

ce qui donnera pour $p \geqq 5$, $a \geqq 1$

$$q-3 \geqq 4a-2 \geqq 2a > a.$$

Cela posé, nous aurons en vertu de (13) et (14), pourvu que $r \geqq 2$,

$$(15) \qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} B_{n+s\mu} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Supposons maintenant, dans (13), $n = 0$, nous avons

$$s_0(p-1) = p-1,$$

ce qui donnera, en vertu de (14),

$$(16) \qquad 1 - \frac{1}{p} \equiv \sum_{s=1}^{s=r} (-1)^{s+s\mu} \binom{r}{s} B_{s\mu} \pmod{p}.$$

Il est évident que le terme

$$\frac{1}{p}$$

disparaîtra dans les formules (15) et (16)

Je n'ai pas réussi à démontrer que le premier terme de (15) est divisible par une puissance plus élevée de p.

Il est très intéressant, ce me semble, que les congruences que nous venons de démontrer jouent un rôle important dans la théorie des résidus quadratiques et des quotients de Fermat.

XV. Remarques historiques et critiques.

Il est bien connu que l'on a fait des objections graves contre la démonstration que Kummer a donneé pour son cas particulier de la congruence (7) du paragraphe XIV.

En effet, on a reproché à l'illustre géomètre allemand qu'il a appliqué des séries infinies d'une façon illégitime.

Or, le point de départ de Kummer est une série infinie de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (e^{\alpha x} - e^{\beta x}), \quad \alpha \neq \beta, \tag{1}$$

série qu'il faut transformer dans une série de puissances, savoir

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots \tag{2}$$

Supposons maintenant que la série de puissances $\Sigma a_n x^n$ ait un rayon de convergence plus grand que zéro, il existe par conséquent un nombre positif ρ, tel que la série (1) est uniformément convergente pour $|x| \leq \rho$; car la fonction continue

$$(e^{\alpha x} - e^{\beta x})^n$$

a, dans $x = 0$, un zéro précisément de l'ordre n.

Appliquons ensuite l'identité

$$(e^{\alpha x} - e^{\beta x})^n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} e^{(n-s)\alpha x + s\beta x},$$

puis posons pour abréger

$$\mathfrak{A}_n^r(\alpha, \beta) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \left((n-s)\alpha + s\beta\right)^r, \tag{3}$$

nous avons par conséquent

$$\mathfrak{A}_n^r(\alpha, \beta) = 0, \quad r < n, \tag{4}$$

ce qui donnera

$$(e^{\alpha x} - e^{\beta x})^n = \sum_{r=n}^{r=\infty} \frac{\mathfrak{A}_n^r(\alpha, \beta)}{r!} x^r.$$

Cela posé, un théorème très connu de Weierstrass montre clairement qu'une série de puissances de la forme (2) existe; et nous aurons de plus

$$n!\,A_n = \sum_{s=0}^{s=n} a_s \mathfrak{A}_s^n(\alpha, \beta)\,; \tag{5}$$

c'est-à-dire que les séries qui figurent dans la démonstration de Kummer sont des séries finies; cependant, l'illustre géomètre ne mentionne pas ce fait fondamental.

De cette manière Kummer indique, par des exemples, le cas particulier correspondant à $p = 2\mu + 1$ de notre formule (5) du paragraphe XIV; mais il ne mentionne pas la propriété de la fraction irréductible

$$\frac{B_{n+s\mu}}{2n+2s\mu} = \frac{c_{n+s\mu}}{d_{n+s\mu}},$$

savoir que le dénominateur $d_{n+s\mu}$ ne peut jamais être divisible par le nombre premier p, ce qui est essentiel dans la démonstration.

J'ignore si Kummer a connu le théorème susdit de v. Staudt, découvert en 1845; c'est-à-dire six ans avant la publication de la Note de Kummer.

Table des matières.